

Laboratorio di geometria piana

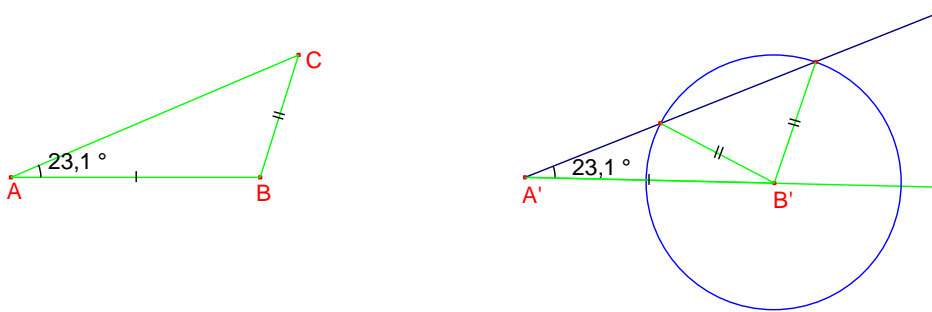
Gli esercizi ed i problemi che seguono serviranno a riportare alla vostra attenzione vecchie conoscenze: triangoli, criteri per comprendere se due triangoli sono congruenti, le conseguenze dell'esistenza di rette parallele, aree di figure semplici, il teorema di Pitagora.

1. Sono dati due triangoli, ABC , $A'B'C'$, di cui si sa che:

- il lato AB è congruente al lato $A'B'$
- il lato BC è congruente al lato $B'C'$
- l'angolo con vertice A è congruente all'angolo con vertice A' .

Si può concludere che i due triangoli ABC , $A'B'C'$ sono congruenti? **Motivare la risposta!**

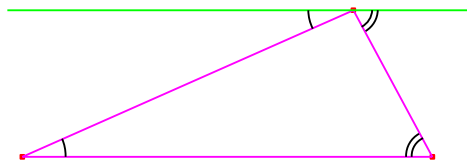
Esempio di motivazione



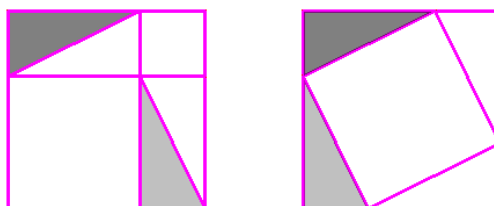
Ricordiamo: criteri di congruenza dei triangoli.

2. Quanto vale la somma degli angoli di un triangolo qualsiasi? **Perché?**

Ricordiamo l'unicità della parallela e le relazioni tra angoli formati da parallele con trasversali



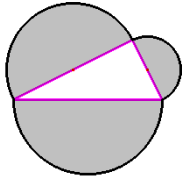
3. Se un triangolo è rettangolo ed ha un angolo di 25° , qual è l'ampiezza dell'altro angolo?
4. Se un triangolo è rettangolo ed isoscele, che si può dire dei suoi angoli?
5. I Cinesi del II secolo a. C. davano una dimostrazione del teorema che noi attribuiamo a Pitagora usando il confronto di questi due quadrati:



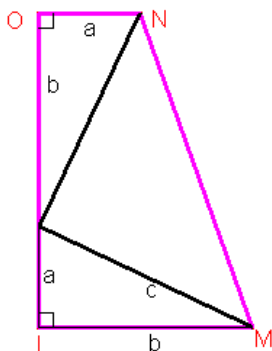
Aggiungere alla figura le parole della dimostrazione.

*Il lato di ciascun quadrato “grande” è la somma dei cateti del triangolo rettangolo scuro.
 Se dal primo quadrato grande si tolgono i rettangoli composti ciascuno da due copie del triangolo rettangolo, quello che resta sono i quadrati sui cateti; se dal secondo quadrato grande si tolgono i quattro triangoli rettangoli, quello che resta è un quadrilatero che i lati tutti uguali all’ipotenusa; perché possiamo dire che è un quadrato?*

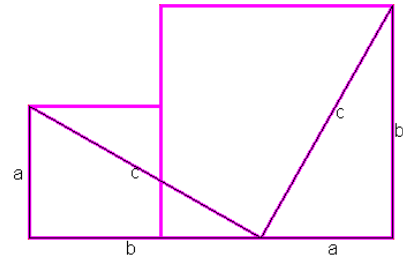
6. E' dato un triangolo rettangolo; si costruiscono i semicerchi che hanno come diametri i cateti e l'ipotenusa: C'è una relazione tra le loro aree?



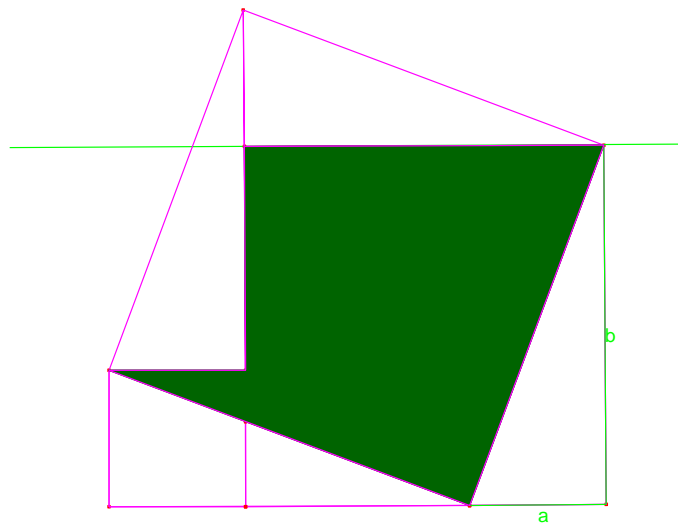
7. Si stende un nastro intorno alla superficie terrestre lungo tutto l'equatore; la sua lunghezza deve essere circa 40.000.076 metri. Se si allunga il nastro di 6 metri e 28 cm, il nuovo nastro si solleva un po' da terra: abbastanza da consentire a un cocodrillo di passarci sotto? (L'altezza media di un cocodrillo è circa mezzo metro).
8. Due amici, in pizzeria, ordinano due pizze napoletane; Andrea la “normale”, Paolo la “gigante”. Le pizze sono perfettamente circolari, la normale ha raggio 20 cm, la gigante 30 cm, e sono anche dello stesso spessore. Quando arriva il conto, Andrea scopre che deve pagare 6,40 euro, mentre Paolo 12 euro; Paolo si sorprende: *Come mai la mia pizza costa quasi il doppio della tua, se il raggio è aumentato solo del 50%?*
9. Un presidente degli Stati Uniti d’America, James Garfield, utilizzò la formula dell’area del trapezio per trovare una dimostrazione algebrica del teorema di Pitagora. Controllare se la figura usata da Garfield (qui sotto) è davvero un trapezio e ricavare la dimostrazione del teorema di Pitagora secondo Garfield.



1. Questa dimostrazione senza parole del teorema di Pitagora non ha bisogno di calcoli, ma solo di ragionamenti sulla figura: **quali ragionamenti?** (Può essere utile aggiungere qualche elemento alla figura.)



Aggiungendo altre due copie del triangolo di cateti a , b si costruisce il quadrato sull'ipotenusa. Il quadrato sull'ipotenusa è decomposto in rettangoli ed una parte verde; anche la somma dei quadrati sui cateti!



10. **Scrivere** l'enunciato del teorema inverso del teorema di Pitagora, e discuterne la validità.

Riepilogo:

criteri di congruenza dei triangoli.

l'unicità della parallela e le relazioni tra angoli formati da parallele con trasversali

somma degli angoli di un triangolo

angoli di un triangolo isoscele

teorema di Pitagora

area del cerchio e lunghezza della circonferenza

area del trapezio

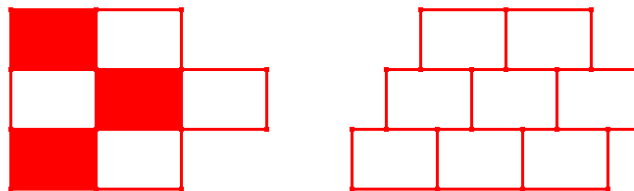
inverso di un teorema

figure che sono scomponibili in parti congruenti hanno la stessa area

Laboratorio di geometria piana

Come nel precedente laboratorio, gli esercizi ed i problemi che seguono serviranno a riportare alla vostra attenzione vecchie conoscenze: poligoni regolari e loro angoli, circonferenze e poligoni, figure simili.

1. Quando il prof. Geoblù comprò il suo appartamento, al momento di scegliere i pavimenti disse al costruttore: “non mi importa la misura delle piastrelle, chiedo solo che siano tutte uguali, tutte blu, a forma di poligono regolare, incollate lato contro lato; per la forma, decida lei”. Secondo voi, il prof. Geoblù ha lasciato molti margini di scelta al costruttore? Discutetene in piccoli gruppi e scrivete le conclusioni a cui siete giunti. *(Per chiarezza, qui sotto a sinistra è disegnato un pezzo di pavimento a piastrelle incollate lato contro lato, a destra un pavimento che non soddisfa questa condizione; nessuno dei due sarebbe accettato dal prof. Geoblù).*



2. Qual è l'ampiezza di un angolo di un pentagono regolare?
3. Se un poligono regolare ha n lati, qual è l'ampiezza dei suoi angoli interni?
4. Sono dati dei triangoli rettangoli, che hanno tutti un cateto lungo 2 cm. Trovare le misure degli altri lati e angoli nei tre casi
 - a) l'angolo acuto adiacente al cateto considerato è di 60° ,
 - b) l'angolo acuto adiacente al cateto considerato è di 45° ,
 - c) l'angolo acuto opposto al cateto considerato è di 30° .
5. Il triangolo EGF ha il lato EG lungo 10 cm, il lato GF lungo 8 cm e l'angolo con vertice G di 150° ; qual è la sua area?
6. L'affermazione che segue è vera o falsa?

Se due triangoli ABC , $A'B'C'$ sono tali che il lato AB è congruente al lato $A'B'$, il lato BC è congruente a $B'C'$, e CA è congruente a $C'A'$, allora l'angolo con vertice A è congruente all'angolo con vertice A' , l'angolo con vertice B è congruente all'angolo in B' e l'angolo in C è congruente all'angolo in C' .

Enunciare la proposizione inversa della precedente: è un'affermazione vera? Perché?
7. Talete (624-547 a. C.) misurò l'altezza di una piramide misurando la lunghezza delle ombre di una piramide e di un bastone; spiegate come fece.

8. Due amici che passeggiano sulla riva del mare vedono una nave lontana; come possono misurare la distanza della nave dalla costa, se hanno a disposizione strumenti per misurare le distanze sulla costa e gli angoli?

9. Un triangolo ha lati che misurano 3cm, 4 cm, 5 cm; un triangolo simile ad esso ha il lato minore di 4,5 cm. Quanto misurano gli altri due lati ed almeno un angolo?

10. Se raddoppio il lato di un quadrato, raddoppio anche l'area? E che rapporto c'è tra il volume di un cubo e quello del cubo col lato doppio?

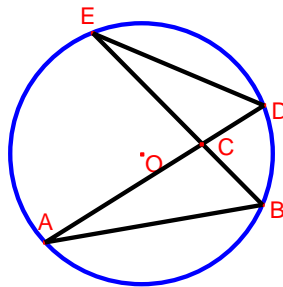
11. Se dovete disegnare due rette parallele, avendo a disposizione riga e squadra, come fate?

12. Se dovete dividere in 5 parti uguali un segmento disegnato su un foglio di carta e avete a disposizione compasso, riga e squadra, come fate?

12. Dimostrare, utilizzando triangoli rettangoli simili, che l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

13. Sapete disegnare un triangolo rettangolo se non avete la squadra ma soltanto riga e compasso?

14. Dimostrare che i triangoli ABC , CDE sono simili

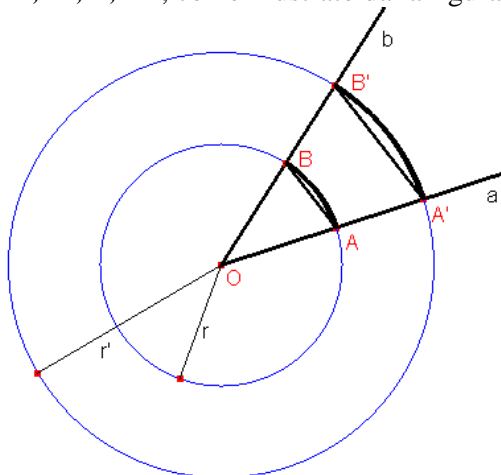


15. E' vero che per tre punti non allineati passa una sola circonferenza? Giustificate la risposta.

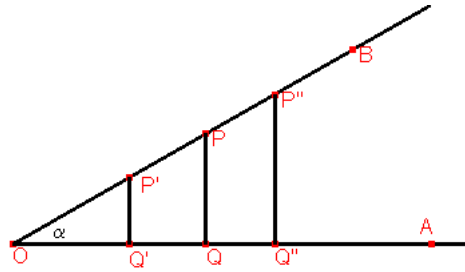
Laboratorio di geometria piana (con alcune risposte)

Gli esercizi e i problemi che seguono vogliono riportare alla vostra attenzione questioni riguardanti la misura degli angoli, e i fondamenti della trigonometria.

1. Fissiamo un punto O , due semirette a, b di origine O , due circonferenze, di centro O e raggi r, r' , su cui le semirette tagliano i punti A, A', B, B' , come illustrato dalla figura qui sotto.



- Che cosa si può dire dei triangoli $OAB, OA'B'$?
 - E dei rapporti tra lunghezze $\frac{AB}{r}, \frac{A'B'}{r'}$?
 - E se si sostituiscono i segmenti $AB, A'B'$ con gli archi con gli stessi estremi?
 - E se A e B sono gli estremi di un diametro (e così anche A' e B'), come si chiamano quei rapporti?
2. Qual è la misura in gradi dell'angolo di 1 radiante? E quella in radianti dell'angolo di 1° ?
- 1: $2\pi = x : 360$, $x = 180/\pi = 57, 29\dots$ $1/x = 0,017\dots$
3. Esprimere sia in gradi che in radianti la misura dell'angolo
- retto, considerato in verso antiorario $90^\circ \quad \pi/2$
 - retto, considerato in verso orario $270^\circ \quad 3\pi/2$
 - piatto, considerato in verso antiorario $180^\circ \quad \pi$
 - convesso, formato da due lati di un triangolo equilatero, considerato in verso antiorario $60^\circ \quad \pm\pi/3$
 - convesso, formato da un lato di un quadrato con la diagonale, considerato in verso antiorario
 - convesso, con vertice nell'ortocentro di un triangolo equilatero, e lati passanti per due vertici, considerato in verso antiorario
 - pari a $3/5$ dell'angolo retto considerato in verso orario $-54^\circ \quad -3\pi/10$
 - descritto dalla lancetta delle ore in 25 minuti.
- ($-\frac{5}{12} \frac{1}{12} 360^\circ = -\frac{25}{2}^\circ = -12^\circ 30' = 347^\circ 30'$ o $-\frac{25}{2} \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{72} \pi$)
4. Si consideri la figura seguente, in cui i triangoli $OPQ, OP'Q', OP''Q''$ sono rettangoli. Trovare delle relazioni tra i segmenti $OP, PQ, OQ, OP', P'Q'$, eccetera.



5. Calcolare il seno, il coseno, la tangente degli angoli: $\pi/3$, $\pi/6$, $\pi/4$.

6. Come si fa per calcolare $\sin(11^\circ)$?

Si prende la calcolatrice

7. In un triangolo rettangolo un cateto misura 2 cm. ed il coseno dell'angolo adiacente ad esso è 0,3. Calcolare le misure dell'altro cateto e dell'ipotenusa.

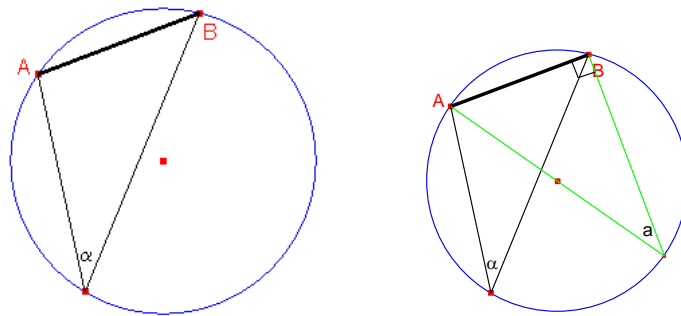
8. In un rettangolo, una diagonale misura 30 cm. e forma un angolo di 30° con un lato. Qual è l'area del rettangolo?

9. Un triangolo rettangolo ha i lati cateti di lunghezza 5 cm e $5\sqrt{3}$ cm. Determinare la lunghezza dell'ipotenusa e la misura degli angoli.

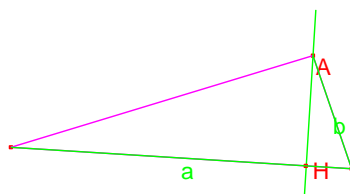
10. Il teodolite è uno strumento a cannocchiale per la misurazione degli angoli. Avendo a disposizione il teodolite e potendo misurare le distanze sul terreno, supposto pianeggiante, come si fa a misurare l'altezza di un campanile?

11. Su una circonferenza di raggio r sono fissati due punti, A , B . Sia α l'ampiezza di uno qualsiasi degli angoli con vertice nell'arco maggiore tra quelli individuati da A , B e lati passanti per A , B . E' vero che la lunghezza della corda AB è $2r \sin \alpha$? Perché?

(Risposta: tra tutti i triangoli in cui AB è un lato e l'angolo opposto misura α , c'è quello a destra....)



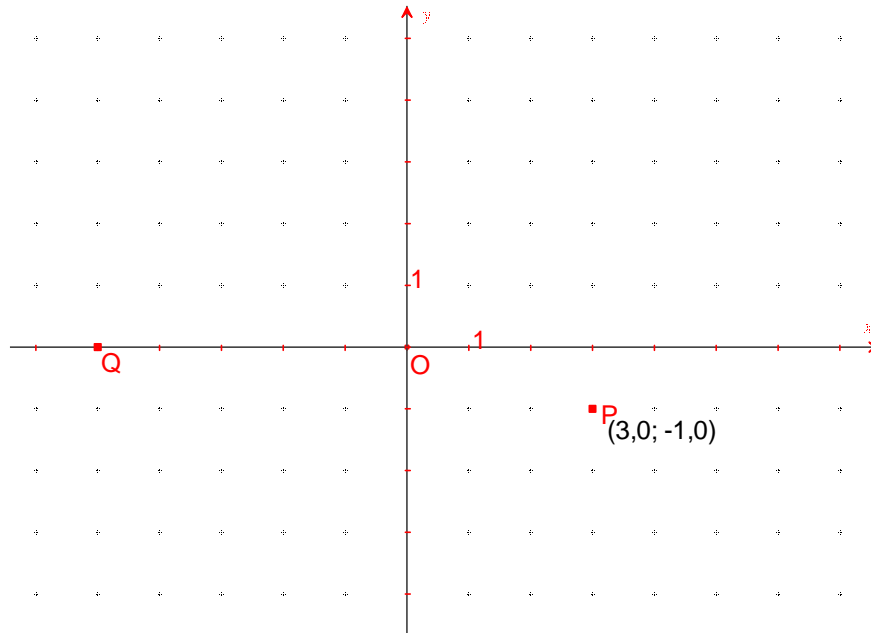
12. Individuare una strategia per dimostrare che l'area di un triangolo, di cui sono noti due lati e l'angolo compreso, si può ottenere come semiprodotto delle misure dei lati e del seno dell'angolo compreso.



Laboratorio di geometria.

Con il primo esercizio si vuole riprendere familiarità con le coordinate cartesiane nel piano. Dopo una sintetica introduzione alle funzioni trigonometriche, ci si eserciterà nel calcolo di valori particolari di queste funzioni e nella risoluzione di equazioni in cui esse compaiono.

1. Nel disegno qui sotto sono tracciati degli assi cartesiani x,y e sono segnati due punti: P , di coordinate $(3,-1)$, Q , sull'asse delle x .



- Quali coordinate ha il punto Q ?
- Quali coordinate ha il punto P' che è simmetrico di P rispetto all'origine degli assi?
- Quali coordinate ha il punto P'' che è simmetrico di P rispetto all'asse delle x ?
- Quali coordinate ha il punto P''' che è simmetrico di P rispetto all'asse delle y ?
- Segnare nella figura i punti $R = (-4,5)$, $S = (0,5)$.
- Dove si trovano i punti che hanno la stessa ascissa di P ?
- Quali sono i punti che hanno l'ascissa x uguale a 0? E quelli che hanno l'ordinata uguale a 0?
- Dove si trovano tutti i punti che hanno l'ascissa x uguale all'ordinata y ?
- Qual è la distanza di P da O ? e la distanza di P da S ?

Richiami.

Fissato un sistema cartesiano ortogonale Oxy nel piano, si considera la circonferenza di raggio uguale ad 1 con centro in O . Sia P un punto su questa circonferenza e sia α una misura in radianti dell'angolo orientato che l'asse x forma con la semiretta OP . Qualunque sia l'angolo di misura α (anche non acuto!) si definisce:

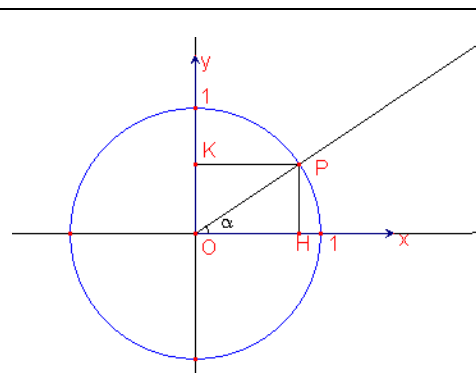
- $\cos \alpha$ l'ascissa di P (cioè la misura con segno del segmento OH),
- $\sin \alpha$ l'ordinata di P .

Poiché le coordinate dei punti sulla circonferenza sono comprese tra -1 e 1 , si ha, per ogni α :

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

Per il teorema di Pitagora, è

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1.$$



<p>Poiché le misure $\alpha, \alpha+2\pi, \alpha+4\pi, \dots, \alpha-6\pi, \dots$ determinano la stessa semiretta e lo stesso punto P sulla circonferenza, per qualsiasi intero relativo k è:</p> $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha, \sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha.$ <p>Semirette simmetriche rispetto all'asse delle x formano con l'asse angoli di misure opposte, e determinano sulla circonferenza punti simmetrici rispetto all'asse delle x, come P, P' oppure Q, Q' in figura, che hanno la stessa ascissa e ordinate opposte. Ne segue:</p> $\cos\alpha=\cos(-\alpha), \sin\alpha=-\sin(-\alpha).$	
---	--

2. Per quali valori di α ha senso definire: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$?

3. Riempire le caselle vuote nella tabella

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0			
π			
$\pi/2$			
$\pi/3$			
$\pi/4$			
7π			
$35\pi/4$			
$11\pi/3$			
	0		
		0	
			0
		-1	
			-1

4. Disegnare (approssimativamente) i grafici delle funzioni $\cos x, \sin x, \tan x$.

5. Risolvere le equazioni nell'incognita x :

$$\cos x = 1 ; \quad \cos x = \frac{1}{2} ; \quad \sin x = -1; \quad \sin x = 3; \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan x = -\sqrt{3}.$$

6. Quante sono le soluzioni dell'equazione $\cos x = 1/3$ che sono comprese tra $-3,2$ e $9,4$?

7. Un angolo α è maggiore di un angolo piatto ed il suo coseno è uguale a $-1/4$. Quanto valgono $\sin\alpha, \tan\alpha$?

8. Se $\sin\alpha = -3/5$ quali valori può prendere $\tan\alpha$?

9. Sapendo che è $\tan\theta = -2\sqrt{2}$, e che la semiretta che forma l'angolo θ con l'asse delle x (orientato) è contenuta nel quarto quadrante, si possono determinare $\cos\theta, \sin\theta$?

10. Quando una strada sale di 20 m su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Se un ingegnere deve progettare una strada con pendenza del 15%, che angolo di inclinazione della strada, rispetto all'orizzontale, indica nel suo disegno?

Laboratorio di goniometria

I primi esercizi considerano alcune proprietà delle funzioni trigonometriche che si possono facilmente dedurre dalle loro definizioni. Altri esercizi richiedono la conoscenza di teoremi usualmente dimostrati nella scuola superiore. Infine, applichiamo le conoscenze di trigonometria alla rappresentazione delle rette in coordinate cartesiane.

1. Sia θ tale che sia $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\cos \theta = 1/3$. Calcolare

$$\cos(\theta + \pi/2), \sin(\theta + \pi/2), \cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi), \tan(\theta - \pi/2).$$

2. Che relazioni ci sono tra $\tan \theta$, $\tan(\theta + \pi)$ e $\tan(\theta + \pi/2)$?

3. Risolvere le equazioni:

a) $\sin^2 x + \sin x = 0$

b) $\sin^2 x - \sin x + 1/4 = 0$

c) $2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$

d) $(\cos x)^4 + (\sin x)^4 = 1$

e) $\sin^2 x + \sin 3x = 7$.

4. Usando le formule

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

a) calcolare il coseno e seno di 105° (suggerimento: $105 = 60 + \dots$);

b) esprimere $\cos(2\alpha)$, $\sin(2\alpha)$ in funzione di $\cos \alpha$ e di $\sin \alpha$.

5. a) Scrivere una formula che sintetizzi l'enunciato seguente, noto come "Teorema di Carnot":

in ogni triangolo il quadrato della misura di ciascun lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati diminuita del doppio prodotto delle misure di questi lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

b) Utilizzare il teorema di Carnot per risolvere il problema di calcolare la distanza tra due edifici A , B che sono separati da una collina, sapendo che gli edifici sono entrambi visibili ed accessibili da un terzo luogo C (cioè, è possibile misurare l'angolo $\angle ACB$ e le distanze di C da A e da B).

c) C'è qualche relazione tra il teorema di Carnot ed il teorema di Pitagora?

6. Il "teorema dei seni" afferma:

in ogni triangolo è costante il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto.

Utilizzare il teorema dei seni per risolvere il seguente problema topografico: sapendo che due punti A , B distano tra loro 5 km e potendo calcolare le ampiezze degli angoli secondo cui un terzo punto C è visto da A e da B , trovare le distanze di A e di B da C (si supponga di avere a disposizione le tavole delle funzioni goniometriche o una calcolatrice).

7. a) Tracciare il grafico della funzione $x \rightarrow |\sin x|$ per $-\pi < x \leq \pi$;

b) risolvere l'equazione $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nell'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$.

8. Determinare tutti gli x che verificano entrambe le condizioni:

$$-\pi < x \leq \pi \quad \text{e} \quad \sin x \geq 1/2.$$

9. E' data una semiretta a , che ha origine nel punto O di coordinate cartesiane $(0,0)$, e che forma con l'asse delle x un angolo di misura α . Un punto P si muove su a con velocità costante v , partendo da O al tempo $t = 0$; se si indica con s la distanza a cui P è giunto al tempo t , la legge del moto di P è (riempire lo spazio vuoto!) $s = \dots\dots\dots$.

- a) Quali sono le coordinate cartesiane (x,y) del punto P all'istante t ?
- b) Sia U il punto di coordinate $(1,0)$; chiamiamo u la retta che è tangente in U alla circonferenza unitaria (cioè alla circonferenza di centro O e raggio uguale ad 1). C'è un tempo t in cui il punto P taglia la retta u ?
- c) C'è qualche relazione tra le coordinate x,y del punto mobile P ?

10. Nel piano sono fissate delle coordinate cartesiane. Determinare tutti i punti le cui coordinate verificano le condizioni:

- i. $y = x$
- ii. $y = \sqrt{3} x$
- iii. $y = 2x$
- iv. per un certo m dato, $y = mx$,
- v. $y = x + 3$
- vi. $y = \sqrt{3}x - 2$
- vii. per m, q dati, $y = mx + q$.

11. Fissato un riferimento cartesiano, disegnare la retta di equazione $y = x - 3$.

12. Determinare tutti i punti del piano le cui coordinate soddisfano ciascuna delle equazioni
 $x - y - 3 = 0$; $2x - 2y - 6 = 0$; $-x + y + 3 = 0$.

13. Trovare il coefficiente angolare della retta di equazione $2x + 2y + 5 = 0$ e le coordinate del punto in cui essa taglia l'asse delle y . Disegnare questa retta.

14. Dopo aver verificato che il punto di coordinate $(2,0)$ non appartiene alla retta r di equazione $2x + 2y + 5 = 0$, scrivere un'equazione che rappresenti la retta parallela alla r , che passa per il punto $(2,0)$.

15. Trovare le coordinate di due punti che appartengono alla retta $2x + y + 6 = 0$ e fare uno schizzo che rappresenti la retta.

16. Scrivere un'equazione che rappresenti la retta per il punto $(-4,3)$ e parallela all'asse delle y .

17. Scrivere una equazione che rappresenti l'asse delle x . Qual è una equazione dell'asse delle y ?

18. Scrivere un'equazione che rappresenti la retta per $(-4,3)$ parallela alla retta di equazione $3x + 2y + 12 = 0$.

19. Scrivere un'equazione che rappresenti la retta per $(-4,3)$ e $(0,2)$.

20. Se le due rette r di equazione $2x + y + 6 = 0$ ed s di equazione $x - 2y - 7 = 0$ non sono parallele, trovare le coordinate del punto in cui si intersecano.

29 settembre 2008 - Esercitazione

1. Sia $S = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ è divisibile per } 3 \vee z \text{ è un numero dispari}\}$. Dire se i seguenti insiemi sono sottoinsiemi di S :
 $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ è divisibile per } 6\}$, $B = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ è primo}\}$, $C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ è divisibile per } 27\}$.
2. Sono dati gli insiemi $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \geq 0\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$.
Determinare $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \Delta Y$.
3. Sia $n \in \mathbb{N}$. Scrivere la formula che esprime la radice quarta del modulo della differenza tra il cubo di n ed il quadruplo del quadrato del precedente di n .

4. Determinare il valore dell'espressione

$$\frac{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{42}{8} \cdot \frac{4}{21}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{25}}$$

5. Calcolare $\log_{\pi}(1 - \cos x) + \log_{\pi}(1 + \cos x) - 2 \log_{\pi} \sin x$.
6. Come si può scrivere $(\log_a b)(\log_b a)$?
7. Calcolare, utilizzando l'algoritmo di Euclide, il massimo comune divisore di 1221 e 2457.
8. Risolvere le equazioni:
 - a. $\log_3 x^4 + \log_3 x^3 + \log_3 x^2 + \log_3 x = 10$
 - b. $\log_x \frac{1}{8} = -3$
 - c. $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.
9. Sia $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Determinare quale tra i seguenti polinomi divide $p(x)$:
a) $x - 3$ b) $x + 3$ c) $x - 2$ d) $x + 2$
10. Calcolare il quoziente ed il resto della divisione tra i polinomi
 $a(x) = x^3 - 2x + 3$ e $b(x) = 2x^5 - 5x^4 + x$.

11. Risolvere le seguenti disequazioni, e scrivere i risultati sotto forma di intervalli:

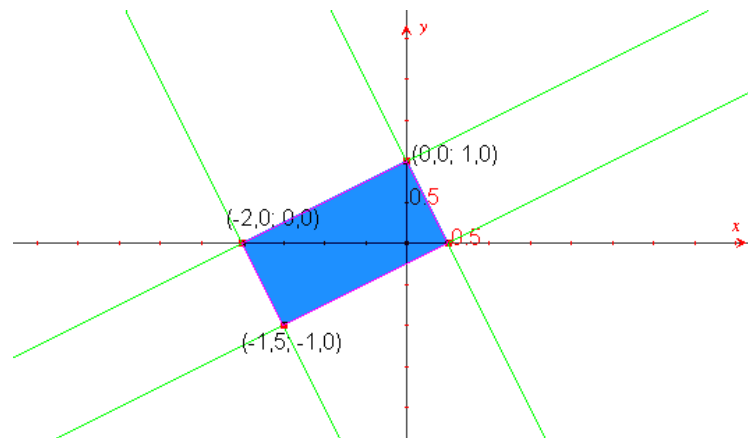
- a. $\frac{|2x+1|}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$
- b. $|x-1| < |x+3|$
- c. $\left| \frac{2}{x+3} \right| > 1$.

12. La diagonale di un rettangolo misura 5 cm e forma con un lato del rettangolo un angolo di 30° . Calcolare l'area del rettangolo.
13. Quante soluzioni dell'equazione $\cos x = -1/4$ sono contenute nell'intervallo $(-3\pi, 3\pi)$?

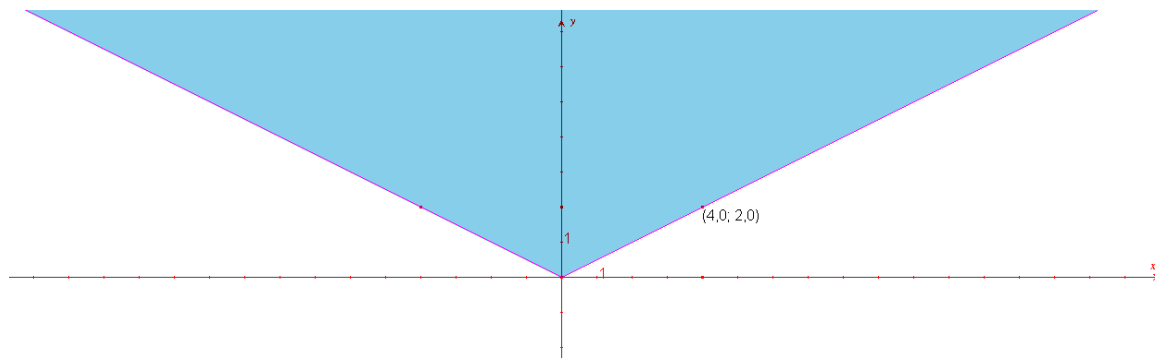
Laboratorio di geometria

A volte la rappresentazione grafica è di aiuto nella soluzione di problemi che comportino la considerazione di equazioni in due incognite, come nella maggior parte degli esercizi proposti qui sotto.

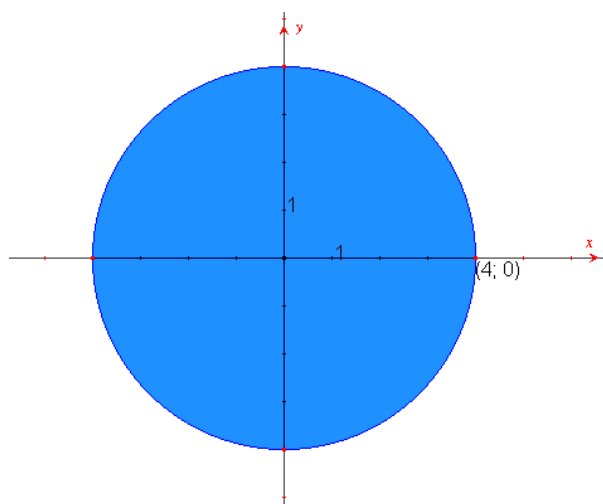
1. Un corriere A trasporta pacchi alla tariffa di 10 euro al chilogrammo, mentre il corriere B pratica un costo fisso di 12 euro per spese generali e chiede 8 euro al chilogrammo. Stabilire per quali spedizioni (cioè, per pacchi di quali pesi) sia più conveniente il corriere B.
2. Un noleggiatore di videocassette propone questi due contratti alternativi:
 - 2,5 euro per cassetta più una quota fissa annuale di 25 euro
 - 3 euro per cassetta senza nessuna quota fissa.
 Quale tariffa è più conveniente?
3. Individuare le regioni piane determinate dalle seguenti condizioni:
 - a. $\begin{cases} x - y > 3 \\ x < 3y \end{cases}$
 - b. $xy < 0$
 - c. $\begin{cases} x + 2y < 1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$
 - d. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$
 - e. $\begin{cases} 0 < |x| < 1 \\ 0 < |y| < 1 \end{cases}$
 - f. $|x + y| \leq 1$.
4. Scrivere dei sistemi di equazioni oppure di disequazioni le cui soluzioni siano le coordinate dei punti della regione di piano colorata.



5. Scrivere dei sistemi di equazioni o di disequazioni che definiscano la regione angolare illimitata, in colore nella figura successiva.



6. Scrivere un'equazione che rappresenti la circonferenza di centro $(2,1)$ e raggio 3.
7. Trovare il centro ed il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 3y = 0$.
8. Disegnare la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$.
9. Stabilire graficamente (senza fare conti!) che il sistema
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$
 non ha soluzioni.
10. Caratterizzare algebricamente (con equazioni o disequazioni) la regione di piano colorata



Laboratorio di matematica

Acquistiamo familiarità con i grafici delle funzioni di secondo grado.

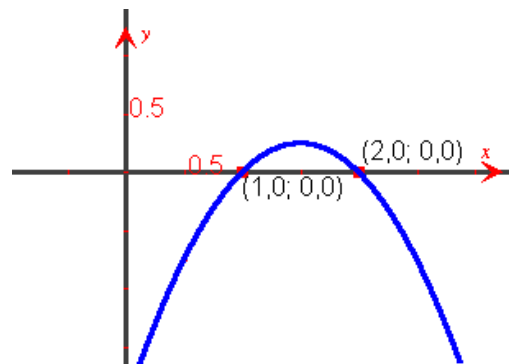
1. Tracciare le parabole di equazione
 - a. $y = x^2 + 2$
 - b. $y = x^2 + 2x + 3$
 - c. $y = -x^2 + 8$
 - d. $y = -x^2 + 4x - 4$
 - e. $y = 5x^2 - 8$.

2. Usare delle parabole per risolvere le disequazioni
 - a. $x^2 - 2x - 1 > 0$
 - b. $-x^2 + 6x - 9 < 0$
 - c. $4x^2 + 16 \leq 0$
 - d. $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

3. Studiare la funzione $y = |x^2 - 4|$ e tracciarne il grafico.

4. Si consideri la famiglia di tutti i rettangoli che hanno un perimetro fissato (per esempio, 120 m). Studiare come varia, al variare della misura dei lati, l'area dei rettangoli della famiglia; determinare le misure dei lati del rettangolo che ha area massima.

5. *Due quesiti a risposta multipla.*
 - La parabola disegnata qui sotto può avere equazione



- A)** $y = (x-1)(x-2)$; **B)** $y = (1-x)(x-2)$; **C)** $y = -(x+2)(x-1)$; **D)** $y = -(x+1)(x+2)$
- La differenza tra due numeri relativi è 10; il loro prodotto è minimo quando i due numeri sono

A) 10; 0	B) -5; -15	C) 5; -5	D) nessuno di questi
-----------------	-------------------	-----------------	-----------------------------

Laboratorio di matematica

Cominciamo con ricordare ed usare i termini tecnici che designano le principali caratteristiche delle funzioni (applicazioni) tra insiemi; consolidiamo la conoscenza delle funzioni elementari, rafforziamo la capacità di tracciare e leggere grafici di funzioni.

1. Funzioni.

Indichiamo con \mathcal{N} l'insieme dei numeri naturali, con \mathcal{Z} l'insieme dei relativi, con \mathcal{Q} quello dei razionali, con \mathcal{R} l'insieme dei reali.

1. Spiegare per quale ragione nessuna delle corrispondenze definite qui sotto è una funzione.

a) $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, tale che, per ogni $n \in \mathcal{N}$, $F(n)$ sia un divisore di n

b) $G: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, tale che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $G(n)$ sia la metà di n

c) $\sqrt{\cdot}: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$, tale che per ogni $q \in \mathcal{Q}$, \sqrt{q} sia quel razionale per cui $(\sqrt{q})^2 = q$

d) $\sqrt{\cdot}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, tale che per ogni $r \in \mathcal{R}$, \sqrt{r} sia un numero reale per cui $(\sqrt{r})^2 = r$

e) $L: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, tale che, per ogni $n \in \mathcal{Z}$, $L(n)$ sia la soluzione dell'equazione $n x = 4$.

2. Nella prima colonna della tabella sono elencate delle funzioni definite su \mathcal{R} oppure su suoi sottoinsiemi, a valori in \mathcal{R} . Per ciascuna delle funzioni della prima colonna, indicare, nelle colonne corrispondenti, qual è il dominio di definizione, se è iniettiva, se è surgettiva, se è bigettiva e, nel caso in cui non sia surgettiva, quale sottoinsieme di \mathcal{R} è il suo codominio (o insieme immagine).

funzione	dominio di definizione	è iniettiva	è surgettiva	è bigettiva	codominio
$x \rightarrow 5x + 2$					
$x \rightarrow 1/x$					
$x \rightarrow \log_{10} x$					
$x \rightarrow e^x$					
$x \rightarrow 10x^2$					
$x \rightarrow x^2 + 3$					
$x \rightarrow x^3$					
$x \rightarrow x^4 + 7$					
$x \rightarrow 2 \cos x$					
$x \rightarrow x + 4 $					
$x \rightarrow \tan x$					
$x \rightarrow \frac{x-1}{x^4}$					
$x \rightarrow \ln(2x+1)$					
$x \rightarrow e^{\frac{1}{x}}$					
$x \rightarrow x^3 + x^2$					
$x \rightarrow \sqrt{x-2}$					
$x \rightarrow \sqrt[3]{x}$					
$x \rightarrow \sqrt[4]{x+1}$					

3. Si considerino le funzioni, da \mathcal{R} in \mathcal{R}

$$f: x \rightarrow 5x + 2; \quad g: x \rightarrow x^3.$$

Trovare le funzioni composte $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ e calcolarne i valori in $x = -2$.

4. Sia $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definita da $h(x) = -4x + 3$. Quale tra le funzioni seguenti è la sua inversa h^{-1} ?

- A) $x \rightarrow 4x - 3$ B) $x \rightarrow -x/4 + 1/3$ C) $x \rightarrow -(x - 3)/4$ D) $x \rightarrow \frac{1}{-4x + 3}$.

Verificare l'esattezza della risposta data, calcolando la funzione composta $h \circ h^{-1}$.

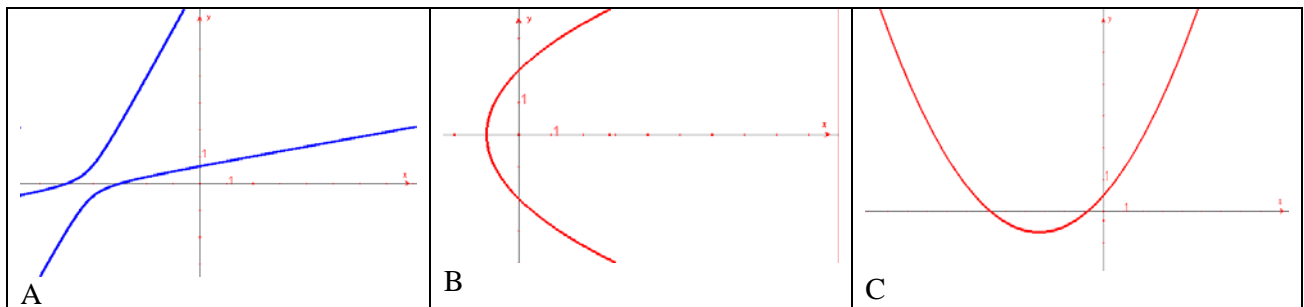
2. Intermezzo.

Risolvere mentalmente (facendo cioè il minor numero possibile di operazioni) le seguenti disequazioni:

1. $\frac{|x|}{x-1} \geq 0$
2. $\frac{|x^2 + 2x - 3|}{x-2} < 0$
3. $\frac{\sqrt{x^4(x-1)}}{|x+1|+3} \geq 0$
4. $\sqrt{x-1}(x+x^8+2\sqrt[3]{x-1}) \geq 0$
5. $\frac{|x|}{1+|x^4-\pi|} > 0$
6. $\sqrt{-x^2} + \sqrt{(x^2-1)x^3} > 0$
7. $\sqrt{1+2x^4} + \sqrt{1+3x^6} > 0$
8. $\frac{\sqrt{x^4(x-1)}}{(x-2)^2} \geq 0$
9. $\sqrt{-x^6} + (x^3 - 2x) \geq 0$

3. Grafici di funzioni.

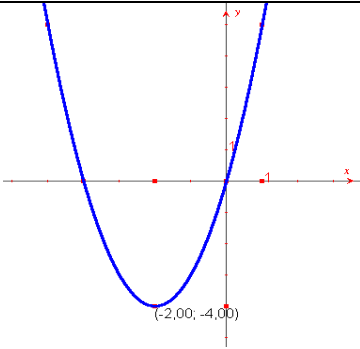
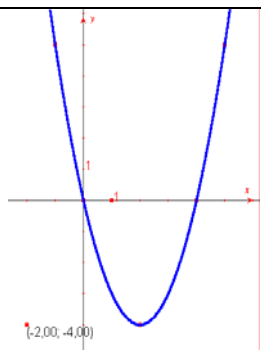
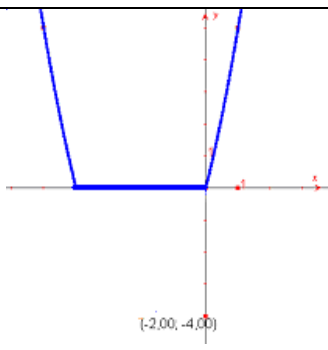
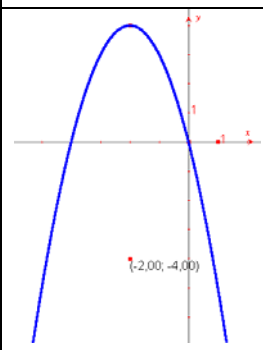
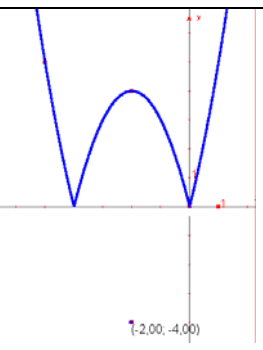
1. Quale, tra le figure che seguono, può rappresentare il grafico di una funzione? Motivare la risposta.



2. a) Disegnare il grafico della funzione $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definita da $h(x) = -4x + 3$ (es. 4 del n. 1) e quello della sua inversa h^{-1} .
- b) Disegnare il grafico della funzione $exp: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ definita da $exp(x) = e^{x+2}$ e quello della sua funzione inversa.
- c) Disegnare il grafico della funzione $c: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definita da $c(x) = x^3$ e quello della sua funzione inversa.

Laboratorio sui grafici di funzioni reali.

1. Verificare che la funzione $x \rightarrow \sin x$ è iniettiva per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; tracciare il suo grafico (per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$) e quello della funzione inversa.
2. Tracciare il grafico della funzione $x \rightarrow \tan x$, per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, e quello della funzione inversa.
3. Scegliere, tra le affermazioni che seguono, quelle corrette, *motivando* ogni scelta.
 - I. Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono curve simmetriche rispetto all'asse delle x .
 - II. Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono curve simmetriche rispetto all'asse delle y .
 - III. Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono curve simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
 - IV. Il grafico di una funzione e quello della sua inversa sono curve simmetriche rispetto all'origine.
 - V. Il grafico della funzione inversa si può ottenere da quello della funzione con una rotazione di 90° attorno all'origine.
 - VI. Il grafico della funzione inversa si può ottenere dal grafico della funzione con una rotazione di 90° in senso antiorario attorno all'origine, seguita da una simmetria rispetto all'asse delle y .
- 4.

<p>Qui accanto è disegnato il grafico di una funzione quadratica F. Quale dei grafici disegnati sotto può essere quello della funzione $G = F$, definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$</p> $G(x) = F(x) \text{ ?}$			
 <p>A)</p>	 <p>B)</p>	 <p>C)</p>	 <p>D)</p>

5. Disegnare il grafico della funzione:

$$F: x \rightarrow 2x - 3$$

ed utilizzarlo per disegnare anche i grafici delle funzioni

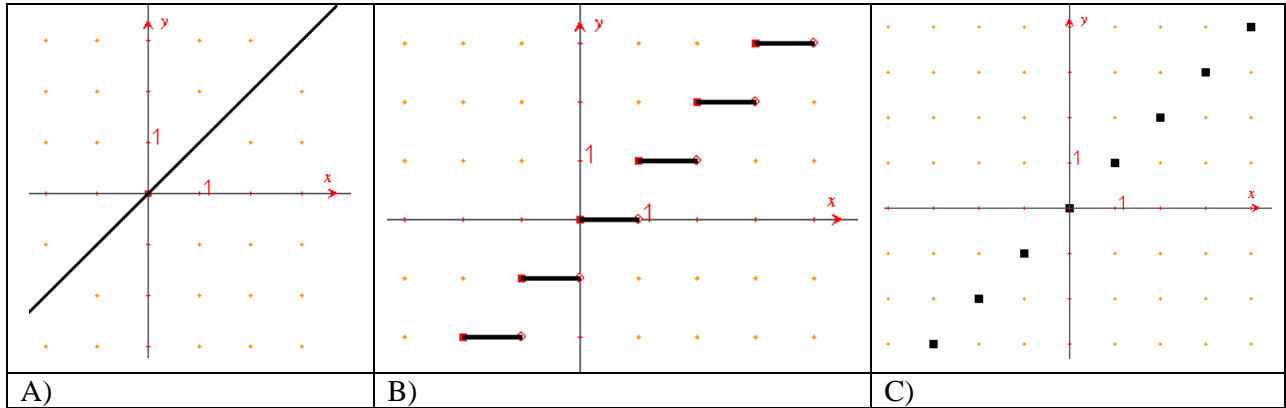
$$-F: x \rightarrow -(2x - 3), \quad |F|: x \rightarrow |2x - 3|, \quad -|F|: x \rightarrow -|2x - 3|, \quad \frac{1}{F}: x \rightarrow \frac{1}{2x - 3}$$

ed infine disegnare il grafico della funzione ottenuta componendo le due funzioni $| \cdot |$ e F , cioè

$$F \circ | \cdot | : x \rightarrow 2|x| - 3.$$

6. Disegnare il grafico della funzione $k: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $k(x) = 3$ e disegnare il grafico della funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = 3$.

7. Si chiama “parte intera” di un numero reale a , e si indica con $[a]$, il massimo tra gli interi relativi che non superano a . Qual è il grafico della funzione $a \rightarrow [a]$?



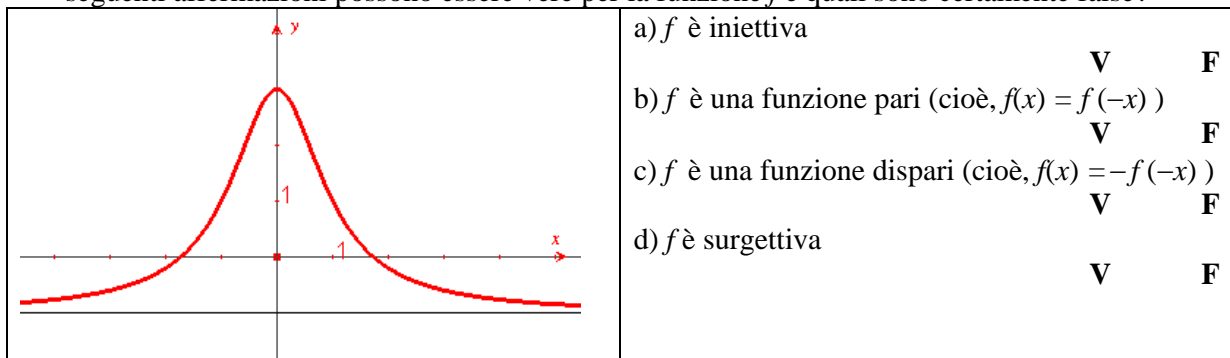
8. a) Disegnare il grafico delle funzione $x \rightarrow \sqrt{4-x^2}$.

b) Scrivere un'equazione della circonferenza che ha il centro nell'origine delle coordinate e il raggio uguale a 2; disegnare questa circonferenza nel piano cartesiano e confrontarla con il grafico precedente.

9. Disegnare il grafico della funzione $x \rightarrow -\sqrt{-3+4x-x^2}$.

10. E' vero o falso che, data una qualsiasi circonferenza nel piano cartesiano, l'arco di circonferenza che si trova nel semipiano chiuso $y \geq 0$ (oppure l'arco contenuto nel semipiano $y \leq 0$) è il grafico di una funzione definita su un intervallo? Motivare la risposta.

11. La figura mostra una parte del grafico di una certa funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Quale o quali tra le seguenti affermazioni possono essere vere per la funzione f e quali sono certamente false?



12. Trovare:

- a) un esempio di funzione dispari,
- b) un esempio di funzione surgettiva ma non invertibile,
- c) un esempio di funzione bigettiva,

Confrontare i propri esempi con quelli dei compagni e correggere gli eventuali errori.

Laboratorio su curve piane e su funzioni elementari.

1. Studiare la funzione $x \rightarrow \frac{\sqrt{36-4x^2}}{3}$; ed utilizzare i risultati ottenuti per:
 - a. verificare che i punti del piano le cui coordinate cartesiane verificano l'equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$ sono tutti contenuti in un rettangolo;
 - b. tracciare, nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali, la curva definita dall'equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$;
 - c. rispondere ai quesiti:
 - i. conoscete il nome di questo tipo di curve?
 - ii. Perché a questo nome a volte viene aggiunta la specificazione “del giardiniere”?

2. Si considerino tutti i rettangoli di area fissata k . Scrivere la funzione che esprime la lunghezza di un lato di questi rettangoli in funzione dell'altro lato, e tracciarne il grafico; utilizzarlo per:
 - a. tracciare il grafico della funzione che si ottiene dalla precedente, estendendo il suo dominio a \mathbb{R}^* , cioè a tutti i numeri reali diversi da 0;
 - b. rispondere alla domanda: quale nome hanno le curve di questo tipo?

3. Studiare la funzione $y \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{4+y^2}$.
 - a. Utilizzare i risultati ottenuti per verificare che i punti le cui coordinate cartesiane verificano l'equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ sono tutti esterni alla striscia di piano definita dalla disequazione $x^2 < 9$.
 - b. Verificare che i due sistemi di equazioni $\begin{cases} 2x \pm 3y = 0 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ sono incompatibili e, inoltre, che esistono rette per l'origine che hanno intersezione non vuota con il luogo di punti di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.
 - c. Utilizzare lo studio precedente e considerazioni di simmetria per tracciare il grafico della curva di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.
 - d. Conoscete il nome delle curve di questo tipo? In che cosa le curve dell'esercizio 2 si differenziano da queste ultime?

4. Trovare un cambiamento di coordinate (equivalente ad una traslazione di un asse del sistema di coordinate), con il quale lo studio della funzione $x \rightarrow \frac{1}{3x-1}$ si riconduca allo studio di una funzione del tipo $x \rightarrow k/x$.

5. Trovare un cambiamento di coordinate (che equivalga ad una traslazione dell'origine, ottenuta componendo una traslazione nella direzione delle ascisse ed una nella direzione delle ordinate), con il quale lo studio della funzione $x \rightarrow \frac{2x-3}{x-1}$ si riconduca allo studio di una funzione del tipo $x \rightarrow k/x$.

6. Verificare che il grafico di ciascuna delle seguenti funzioni è un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi; tracciare tale grafico.

a. $y = \frac{3x-2}{2x+1}$; b. $y = \frac{3}{x-1}$;
 c. $y = \frac{-4x}{x+1}$; d. $y = \frac{-2x+3}{10x+15}$.

7. Scrivere un'equazione che rappresenti l'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che passa per il punto $(2, -3)$.

8. E' data una famiglia di parabole, di equazione $y = -\frac{1}{k}x^2 + 2x + \frac{2-k^2}{k-1}$.

- a. Trovare il luogo dei vertici delle parabole.
 b. Si chiami F la funzione il cui grafico coincide con il luogo trovato. Tracciare il grafico della funzione $|F|$.

9. L'equazione $(x-k^2)^2 + (y-2k)^2 = 4$ rappresenta, al variare di k , infinite circonferenze. Trovare a quale figura appartengono i loro centri.

10. Studiare la funzione $y = |x^2 - 6x + 8|$ e tracciarne il grafico.

11. Indicare la risposta esatta, motivando la scelta.

- a. E' data la parabola $y = x^2$; i punti di essa che hanno minima distanza dal punto $(0,3)$ sono

A. $(0,0)$ B. $(\pm\sqrt{3}, 3)$ C. $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ D. $\left(\pm\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

- b. La funzione $y = x - 2|x|$ prende valori positivi per
 A. $x > 0$ B. $x < 0$ C. per ogni x D. Per nessun x .

- c. Nella famiglia di parabole di equazione $y = x^2 - kx + 1$ esistono intersezioni con l'asse delle x per

A. $k = \pm 1$ B. $k \geq 1$ o $k \leq -1$ C. $-2 \leq k \leq 2$ D. $k \geq 2$ o $k \leq -2$

- d. $x^2 + 4y^2 = 1$ è l'equazione di
 A. Un'ellisse B. Una circonferenza. C. Un'iperbole D. Nessuna di queste.

- e. Gli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ hanno equazioni

A. $y = \pm\frac{3}{5}x$ B. $y = \pm\frac{5}{3}x$ C. $y = \pm\frac{25}{9}x$ D. $y = \pm\frac{9}{25}x$.

- f. L'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che passa per il punto $(12, -3/16)$ ha equazione

A. $xy = \frac{9}{4}$ B. $xy = \frac{4}{9}$ C. $xy = -\frac{9}{4}$ D. $xy = -\frac{4}{9}$

- g. La circonferenza con centro nell'origine, tangente all'iperbole $xy = 2$, ha equazione

A. $x^2 + y^2 = 2$ B. $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ C. $x^2 + y^2 = 4$ D. Non è determinata

Caccia all'errore.

Cominciamo con alcuni esempi ben noti di dimostrazioni scorrette; proseguiamo con esempi di usi truffaldini della matematica e con esercizi, svolti da studenti, che hanno dato la risposta giusta in modi completamente errati.

1. Teorema. Tutti gli interi naturali sono uguali tra loro.

Dimostrazione.

- Sia $x = y$.
- Moltiplicando ambo i membri per x si ricava $x^2 = xy$
- Sottraendo da ambo i membri y^2 si ha $x^2 - y^2 = xy - y^2$
- Scomponendo in fattori ambo i membri si ha $(x + y)(x - y) = y(x - y)$
- Dividendo ambo i membri per $(x - y)$ si ricava $x + y = y$
- Ponendo $x = y = 1$ si conclude $2 = 1$
- Aggiungendo 1 ad ambo i membri si trova $3 = 2$
- Analogamente, si ha $4 = 3$, e così via.
- C.v.d.

Dove è l'errore?

2. Teorema. Tutti i conigli sono di uno stesso colore.

Dimostrazione. Per induzione sul numero n di conigli.

- Primo passo dell'induzione: $n = 1$. L'affermazione è vera.
- Secondo passo: si suppone che la proprietà sia vera per $n - 1$ conigli, si deve dimostrarla per n conigli. Dati n conigli, se ne tolga uno, per comodità indicato nel seguito come "coniglio a ". Per l'insieme degli $n - 1$ conigli restanti, la proprietà è vera per ipotesi induttiva: sono tutti di uno stesso colore (ad esempio bianchi). Da questo insieme di $n - 1$ conigli si tolga un coniglio a piacere e si aggiunga il coniglio a , ottenendo nuovamente un insieme di $n - 1$ conigli, che, per l'ipotesi induttiva, hanno tutti lo stesso colore (bianco). Quindi anche il coniglio a è del colore degli altri, cioè gli n conigli dell'insieme dato hanno tutti lo stesso colore.
- Per il principio di induzione, la proprietà è vera per ogni n .

Dove è l'errore?

¹ 3. Come diventare ricchi e ubriachi allo stesso tempo

Da un articolo su una rivista (Time, marzo 1993):

Comprate all'ingrosso, quando ci sono offerte... Considerate una famiglia che compra una bottiglia di vino per settimana. Dato che molti negozi offrono uno sconto del 10% sulle cassette di 12 bottiglie di vino, quella famiglia risparmierebbe il 10% ogni dodici settimane – più del 40% all'anno...

Dove sta l'imbroglio? Si potrebbe far meglio, aumentando il consumo ad una cassetta al mese?

4. Cinquanta per cento in più per cinquanta per cento in meno.

Da una pubblicità apparsa su una rivista:

¹ Gli esempi che seguono sono tratti da E. Barbeau, *Mathematical fallacies, flaws, and fliflam*, The Mathematical Association of America, 2000

Adobe Photoshop® gira più velocemente del 50% su un Power Mac**. Di conseguenza, passerete il 50% di tempo in meno a fissare il vostro schermo nell'attesa che il vostro calcolatore finisca di ritoccare fotografie.

Domanda: che cosa accadrebbe se il programma potesse girare più velocemente del 150% ?

5. Problema. Per uno spettacolo, furono venduti ottocento biglietti, con un ricavo di 2000 dollari. Se il biglietto ordinario costava 4 dollari e quello per gli studenti 2 dollari, quanti biglietti ordinari furono venduti?

Soluzione di uno studente. Sia x il numero dei biglietti venduti. Allora $4x + 2x + 800 = 2000$. Quindi $6x = 1200$, o $x = 200$.

In effetti, furono venduti 200 biglietti ordinari. Commenti?

6. Il fine giustifica i mezzi.

Quesito. Semplificare

$$\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2) + ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$$

Soluzione

$$\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2) + ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay} = \frac{bx(ax + by)^2 + ay(ax + by)^2}{bx + ay} = (ax + by)^2.$$

Commenti?

7. Un'equazione esponenziale.

Problema. Trovare il valore di x che risolve l'equazione

$$e^{x-2} + e^{x+8} = e^{4-x} + e^{3x+2}.$$

Soluzione. Per l'identità $e^a + e^b = e^{a+b}$ si ricava

$$(x-2)(x+8) = (4-x)(3x+2)$$

che si riduce a $0 = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Quindi $x = -2$ oppure $x = 3$. Tutti e due i valori soddisfano l'equazione.

La risposta è esatta, ma qual è l'errore?

8. Proprietà dei logaritmi.

Problema. Trovare il valore di x che risolve l'equazione

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0.$$

Soluzione.

$$\log e^{2x} - \log e^x - \log 2 = 0 \Rightarrow 2x - x - \log 2 = 0 \Rightarrow x = \log 2.$$

La risposta è esatta, ma qual è l'errore?

9. Una disequazione.

Problema. Trovare i valori di x che verificano la disequazione $|x| + |x-1| < 2$.

Soluzione. La disequazione è equivalente a $|2x-1| < 2$, verificata per $-1/2 < x < 3/2$.

Tutti d'accordo?

Laboratorio sulle funzioni esponenziali

1. Determinare il dominio, il codominio ed il periodo della funzione

$$f(x) = 2^{\sqrt{\cos x}},$$

stabilendo se la funzione è pari o dispari.

Poiché f è una funzione composta (funzione di funzione), individuarne le funzioni componenti.

2. Stabilire se

$$f(x) = \log x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2 \log x$$

sono la medesima funzione; giustificare la risposta.

3. Stabilire se

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$$

sono la medesima funzione; giustificare la risposta.

4. Stabilire se

$$f(x) = \log(x^2 - 3x) - \log(x^2 - 4) \quad \text{e} \quad g(x) = \log \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$$

sono la medesima funzione; giustificare la risposta.

5. Senza usare limiti o derivate, ma osservando che si tratta di funzioni composte, tracciare i grafici (approssimativi) delle funzioni:

a) $x \rightarrow \log(x^2 - 4)$

b) $x \rightarrow \log|x^2 - 4|$

c) $x \rightarrow |\log(x^2 - 4)|$

d) $x \rightarrow e^{-x^2+4}$

e) $x \rightarrow e^{|-x^2+4|}$

6. Senza usare limiti o derivate tracciare i grafici approssimativi delle seguenti funzioni (basta fare uso delle semplici conoscenze su logaritmi ed esponenziali)

$$f(x) = \log\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1\right), \quad g(x) = e^{-\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1}$$

7. Risolvere la disequazione:

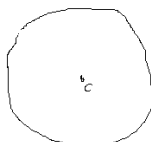
$$(4 \cdot 2^x - 1)(2^{x-1} - 1) > 0.$$

In una scuola media

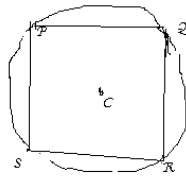
Qui sotto sono raccontati due episodi, in cui i personaggi sono studenti di 13-14 anni, che stanno studiando la geometria dei poligoni ed espongono ai compagni le loro scoperte. Come reagite alle loro affermazioni?

Primo episodio.

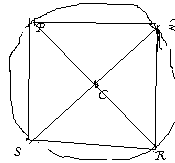
Gianna disegna un cerchio. Chiama C il suo centro.



Poi disegna un quadrilatero $PQRS$, i cui vertici giacciono sulla circonferenza



Poi disegna le diagonali del quadrilatero

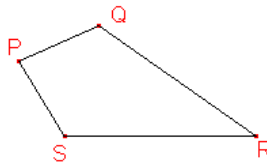


Gianna conclude: “se disegno un qualsiasi quadrilatero, con i vertici su una circonferenza, le diagonali del quadrilatero passano per il centro del cerchio”.

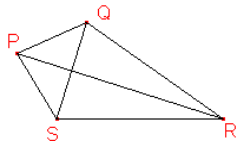
Ha ragione?

Secondo episodio.

Pino disegna un quadrilatero



Quindi disegna le diagonali del quadrilatero



Pino nota che una delle diagonali divide il quadrilatero a metà. Afferma: “in un qualunque quadrilatero, almeno una delle diagonali lo divide a metà”. Ha ragione?

In un laboratorio di matematica per matricole universitarie.

1. Il tutor afferma: “un numero di sei cifre, con le cifre che si ripetono a tre a tre, cioè del tipo $abcabc$, è divisibile per 13.” In quale dei seguenti modi reagireste?

- a) fate alcuni esempi (come 245245 oppure 381381) per controllare che l’affermazione è vera; dopo vari controlli, concludete che è vera
- b) prendete un numero di quel tipo (come 235235) e cercate di dimostrare che la proprietà è vera
- c) pensate che si debba dimostrare che la proprietà è valida per qualunque scelta delle cifre a , b , c e cominciate a pensare come si possa fare
- d) pensate che se non si conosce il numero non è possibile dimostrare la proprietà, si può solo fare qualche esempio
- e) vi fidate del tutor, che dovrebbe sapere di che parla
- f) altro

2. Qualunque sia la vostra risposta al quesito precedente, dimostrate, usando soltanto l’algebra elementare, che: “un numero di sei cifre, con le cifre che si ripetono a tre a tre, cioè del tipo $abcabc$, è divisibile per 13.”

Laboratorio su equazioni esponenziali e logaritmiche, grafici di funzioni, curve

A. Risolvere le seguenti equazioni:

1. $\frac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}} = 1$

2. $3^{2+\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 99$

3. $2 \cdot 3^x - 9^x = 1$

4. $2^{1-x} + 2^{1+x} = 4$

5. $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = 2\sqrt{2}$ (Suggerimento: quale relazione intercorre tra i due numeri tra parentesi?)

6. $\frac{5}{\ln x + 4} - \frac{3}{\ln x - 2} = 4$

7. $\log_3(x+3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+x-2) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_3 2$

8. $\log(4^{1-x} + 2) - \log 2 = \log(2^{2x+1} - 3)$

B. Dati i sottoinsiemi di \mathfrak{R}

$$A = \{x \in \mathfrak{R} \mid 9^x - 3^x - 6 \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathfrak{R} \mid 5^{1-x} + 4 \geq 5^x\},$$

determinare $A \cap B$, $A - B$, e l'insieme complementare di A (in \mathfrak{R}).

C. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $y = \log_x(x^2 - x)$

2. $y = \log_{x^2-1} 3x^2$

3. $y = \ln(x^2 - 4x) + \sqrt{x^2 - 16}$

4. $y = \ln\left(1 - \frac{1+2^x}{1-2^x}\right)$

5. $y = \sqrt{5^x - 5^{1-x}} - 4$

6. $y = \ln \frac{2^{3x} - 2^{1+2x} - 2^x + 2}{2^{3x} - 4^x - 12 \cdot 2^x}$

7. $y = \ln(|x^2 + x - 2| - |x - 1| + 1 - 3x)$

D. In cosa differiscono (se differiscono) i grafici delle seguenti funzioni?

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = 1 & \text{b) } y = \frac{x}{x} & \text{c) } y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ \text{d) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} & \text{e) } y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} & \end{array}$$

E. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{b) } y = \frac{(9x^2 - 1)(3x + 1)}{3x - 1}.$$

F. a) Sapresti disegnare la curva definita, nel piano cartesiano, dall'equazione

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \quad ?$$

Di che tipo di curva si tratta? Descrivila con una frase che permetta di determinarla geometricamente.

Suggerimento: utilizza semplici cambiamenti di coordinate, osserva simmetrie.

b) Disegna e descrivi la curva di equazione

$$4x^2 + 8x + y^2 = 0.$$

Suggerimento: riscrivi l'equazione (imitando l'esercizio a).

c) Descrivi e, quando possibile, disegna i luoghi di punti del piano cartesiano definiti dalle equazioni (*avvertenza:* sono necessari pochi calcoli!)

1. $4x^2 + 4y^2 - 3x - 5y + 30 = 0$
2. $9x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$
4. $9x^2 - 1 = 0$
5. $9x^2 - y^2 + 1 = 0$
6. $9x^2 - y^2 = 0$
7. $9x^2 + 18xy + 9 = 0$
8. $y^2 + 2x + 1 = 0$
9. $xy = 0$
10. $xy + x + y = 0.$