

Stime e calcoli di ordini di grandezza- Problemi alla Fermi

Spesso è utile valutare approssimativamente il risultato di un dato problema. Ad esempio, in alcuni casi le informazioni sono insufficienti per giungere a una soluzione esatta; in altri casi, una stima approssimata della soluzione può servire a decidere se sia necessario un calcolo più preciso o meno.

Di solito, queste approssimazioni sono basate su ipotesi semplificatrici, eventualmente da modificare quando si richieda una precisione maggiore.

Enrico Fermi era noto per la sua abilità nel dare stime a mente usando informazioni che apparentemente sembravano insufficienti per arrivare a una risposta quantitativa; egli inoltre amava sottoporre queste questioni ai propri studenti. Perciò molto spesso si parla di *stime o problemi alla Fermi*. Egli procedeva per approssimazioni, facendo delle ipotesi ragionevoli sui limiti inferiori e superiori delle grandezze da utilizzare in semplici espressioni matematiche. In tal modo arrivava a una soluzione approssimata del problema. Generalmente lo scopo di un problema di Fermi è una stima dell'ordine di grandezza, cioè la potenza di dieci del numero che esprime la risposta cercata.

“Spesso gli studenti credono che i problemi abbiano una risposta esatta e che sia ricavabile in un solo modo. Le “Fermi questions” incoraggiano approcci diversi, sottolineano il processo piuttosto che il risultato, e promuovono strategie di risoluzione non convenzionali.” (Sheila Talamo Univ. Louisiana)

<http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/sheila1.html>

Altre informazioni e problemi alla Fermi si possono trovare sui siti dell'università del Maryland:

<http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm>

Il classico problema di Fermi, attribuito a Fermi stesso, è:

Esempio: Quanti accordatori di pianoforte ci sono a Chicago?

Soluzione: Se la popolazione di Chicago è di 4 milioni di persone e una famiglia media è composta da 4 persone, a Chicago ci sono circa 1.000.000 di famiglie;

supponiamo, inoltre, che un decimo di esse possieda un pianoforte. Quindi ci saranno 100.000 pianoforti.

Se ogni pianoforte è accordato ogni anno, ci saranno 100.000 accordature l'anno.

Supponiamo ancora che ogni accordatore riesca ad accordare 4 pianoforti al giorno, lavorando per 5 giorni la settimana per 50 settimane l'anno. In totale ogni accordatore effettuerà mediamente $4 \times 5 \times 50 = 1.000$ accordature l'anno.

Dividendo si ottiene:

$(100.000 \text{ accordature di pianoforte l'anno a Chicago}) / (1000 \text{ accordature di pianoforte l'anno per accordatore}) = 100 \text{ accordatori di pianoforte a Chicago.}$

Nei problemi di Fermi, l'attenzione va posta sull'approccio e sulle ipotesi fatte, piuttosto che sul risultato. Nell'esempio degli accordatori di Chicago, potremmo fare ipotesi diverse per vari fattori.

Ad esempio, uno studente ha suggerito di considerare l'ipotesi di un pianoforte ogni venti persone. Quest'ipotesi è basata sull'esperienza personale: egli ha considerato che nel proprio palazzo, abitato da una decina di famiglie, ci sono due pianoforti. Con questa ipotesi sul numero di pianoforti per abitante, si potrebbe dire che nella Chicago di Enrico Fermi ci potessero essere 200.000 pianoforti e, quindi, 200 accordatori.

Si osservi che, benché diverso, questo secondo risultato non è in contraddizione con il precedente, perché dello stesso ordine di grandezza. La stima è soltanto rivolta alla valutazione dell'ordine di grandezza e non al numero esatto di accordatori. Se le ipotesi fatte sono ragionevoli, qualunque esse siano, è improbabile che si riesca a giustificare una risposta che sia un ordine di grandezza più piccola o un ordine di grandezza più

grande di quella ottenuta in precedenza; come dire: improbabile che ci siano meno di dieci accordatori e più di mille.

Esistono spesso diverse direzioni che si possono prendere per arrivare alla stima richiesta, come illustrato nell'esempio seguente del quale diamo due soluzioni.

Esempio: Quanto carburante consumano in un anno le automobili di un paese europeo di 50 milioni di abitanti?

Soluzione 1 (suggerita dagli studenti del corso di potenziamento della facoltà di farmacia): Supponiamo che ci sia un'automobile ogni due abitanti, per un totale di 25 milioni di vetture. Ciascuna di queste automobili percorre in media 10000 km l'anno. Supponendo che con un litro di carburante mediamente si percorrono 10 km, si ha che ciascuna vettura consuma

$$\left(10000 \frac{\text{km}}{\text{anno}}\right) \left(10^{-1} \frac{\text{lt}}{\text{km}}\right) = 1000 \frac{\text{lt}}{\text{anno}}$$

Il consumo di carburante totale sarà pertanto $2.5 \times 10^7 \times 10^3 \text{ lt/anno} = 2.5 \times 10^{10} \text{ lt/anno}$

Soluzione 2: Supponiamo sempre che nel paese in questione ci siano 25 milioni di vetture. Per valutare il consumo annuo medio di un'auto consideriamo una spesa settimanale media per auto di 20 Euro, corrispondenti circa a 20 lt. In un anno quindi un'automobile consumerà

$$20 \frac{\text{lt}}{\text{settimana}} = 20 \times 52 \frac{\text{lt}}{\text{anno}} = 1040 \frac{\text{lt}}{\text{anno}}$$

Anche questo secondo approccio porta ad una stima del consumo medio annuo per auto di 10^3 lt/anno . La stima del consumo totale nel paese è quindi dell'ordine di 10^{10} lt/anno .

Esempio: Raggio terrestre (attribuita a Enrico Fermi)

La distanza tra New York e Los Angeles è di circa 3000 miglia. In tale distanza si trovano tre fusi orari, per una media di 1000 miglia per fuso. La terra è divisa in 24 fusi orari per una circonferenza di circa 24000 miglia.

Il raggio della terra sarà perciò $r = 24000/2\pi \sim 24000/6 = 4000 \text{ mi} \sim 6400 \text{ km}$

Esempio: Quanto tè c'è in Cina?

Diciamo che la popolazione cinese è di un miliardo di persone. Ciascuna persona beve, in media, mezzo litro di tè al giorno, per la preparazione del quale occorrono circa 10 g di foglie. Supponendo che ci siano scorte per circa tre mesi, cioè 10^2 giorni, si ottiene:

$$(10^9 \text{ persone}) (10^{-2} \text{ kg/persona/giorno})(10^2 \text{ giorni}) = 10^9 \text{ kg}$$

Esempio: Si stimi il numero di respiri che una persona fa in una giornata.

Incominciamo con lo stimare quanti respiri fa in media una persona in un minuto. Questo dipende dalla persona e dalla sua attività (durante una corsa il respiro è più frequente che a riposo ecc.). In un minuto, una persona fa qualche decina di respiri. Come ordine di grandezza, ipotizziamo una media di 10 respiri al minuto (questa stima è più vicina alla verità di 1 respiro al minuto o di 100 respiri al minuto). Il numero di minuti in un giorno è $24 \times 60 = 1440$, cioè, come ordine di grandezza, 10^3 . L'ordine di grandezza del numero di respiri in una giornata è quindi 10^4 .

Esempio: Quanti capelli ha in media un essere umano ?

Il numero può essere stimato a partire da un conteggio di quanti capelli sono presenti per centimetro quadrato sul cuoio capelluto e da una stima dell'area del cranio coperta

dalla capigliatura. Si potrebbe partire da una stima di qualche centinaio di capelli per centimetro quadrato (come ordine di grandezza diciamo 100) e da una stima di 10 cm per il raggio del cranio, assimilato ad una sfera. Un po' più della metà della superficie del cranio è coperta da capelli, stimiamo la percentuale attorno al 60%. Con queste stime si ottiene che l'ordine di grandezza stimato del numero di capelli è 10^5

Di seguito un elenco di Problemi alla Fermi:

1. Quante gocce d'acqua ci sono nel mare Tirreno?
2. Quanto sarebbe alta una pila di banconote da 100 Euro corrispondente al debito nazionale italiano? e quanto peserebbe?
3. Quanti fagioli entrano in una bottiglia da un litro?
4. Qual è l'area della superficie media di un corpo umano?
5. Quante palline da ping-pong occorrerebbero per riempire la vostra aula?
6. Quanto pesa l'aria contenuta nell'aula?
7. Quanti elettroni ci sono corpo umano?
8. Quanto ci vorrebbe per andare a piedi da Cosenza a Roma?
9. Quanta acqua hai bevuto nel corso della tua vita?
10. Quanto pesano tutti gli esseri umani presenti in Europa?