Concetti introduttivi

prof. Giovanni Falcone

Indice

Capitolo 1

Vettori e Cinematica

1.1 Introduzione

Scriveva Galileo Galilei ne "Il Saggiatore": *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo) ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri, né quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*

La filosofia di cui parla Galilei è la filosofia naturale, il cui scopo è la ricerca della vera costituzione del mondo naturale e il grandissimo libro che costantemente ci sta aperto innanzi agli occhi è il libro della natura. Se il nostro scopo è dedurre le leggi fisiche della natura, per portare a termine il nostro progetto dobbiamo esaminare direttamente la natura e quello che in essa vi accade. Allora possiamo dire che la Fisica ha in sé un *aspetto sperimentale*. Ma come vanno formulate le leggi della natura? Il linguaggio, dice Galilei, è quello della matematica perché come sottolineava anche Henry Poincaré, *la formulazione delle leggi della natura deve avvenire in un linguaggio speciale, perché il nostro linguaggio ordinario è troppo povero oltre che impreciso per poter esprimere relazioni così precise e ricche di contenuto.* Il linguaggio speciale delle leggi fisiche è la matematica, non solo nella sua veste geometrica come suggeriva Galilei. Allora, la Fisica ha in sé anche un *aspetto teorico*, in quanto utilizza un linguaggio artificiale per costruire i suoi modelli. L'insieme dell'aspetto teorico e sperimentale fanno della Fisica una Scienza.

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di fissare il linguaggio della fisica classica e introdurre alcune grandezze fisiche, la cui definizione rappresenta la premessa della nostra indagine. Inoltre, i concetti che introdurremo in questo capitolo di per sé non servono a spiegare il moto, ma solo a descriverlo (cinematica). Il problema delle cause del moto (dinamica) sarà affrontato nel secondo capitolo.

1.2 Il punto materiale

Poiché uno dei nostri scopi è capire alcuni fenomeni che si presentano alla nostra attenzione nella vita quotidiana, il punto di partenza della nostra analisi è l'osservazione della realtà che ci circonda. Essendo la realtà vasta e complessa, occorre estrapolare da essa, *sulla base dell'osservazione*, alcuni concetti semplici e stabilire tra essi delle relazioni. Questo è il primo momento del "*metodo scientifico*". Tale metodo, che procede per approssimazioni successive, fu introdotto per la prima volta da Galilei.

Secondo la visione aristotelica i fenomeni che appartengono alla nostra esperienza quotidiana sono semplici e facilmente spiegabili (anche se talvolta solo in forma qualitativa). Per Galilei, al contrario, il mondo quotidiano è di difficile comprensione perché anche il più semplice dei fenomeni è in realtà molto spesso complesso. Per descrivere qualitativamente le due metodologie facciamo riferimento alla caduta libera di un corpo. Secondo Aristotele un corpo lasciato libero, dopo un certo tempo, raggiunge una velocità costante e la mantiene fino a che non raggiunge il suolo (in questa fase non ci chiediamo il perché cade!). In tal caso, il valore costante della velocità risulta essere proporzionale al peso del corpo e inversamente proporzionale alla resistenza dell'aria.

Nell'analisi aristotelica della caduta libera manca uno degli aspetti fondamentali del metodo scientifico, ovvero non si è distinto tra *aspetti primari e secondari di un fenomeno.*

L'analisi proposta da Galilei è sorprendentemente moderna. Innanzitutto egli considera la resistenza dell'aria come un aspetto secondario del fenomeno della caduta. Non che la resistenza dell'aria non sia importante per descrivere la caduta dei corpi nella realtà ma essa va aggiunta dopo che si è mostrato il carattere fondamentale del fenomeno caduta. In altri termini, nella complessità del fenomeno della caduta, se si vuole giungere alla corretta descrizione della stessa, occorre saper vedere ed escludere gli aspetti secondari, per poi riconsiderarli in un secondo tempo. Eliminata momentaneamente la resistenza, egli pensò di progettare un *esperimento ideale*, al quale associare un modello matematico, da cui dedurre le relazioni tra le quantità fisiche coinvolte nella caduta. Inoltre, non avendo a disposizione gli strumenti per le misure dirette delle velocità dei corpi lungo la traiettoria reale, Galilei escogitò delle *misure indirette* (rapporto tra spazi percorsi e quadrati dei tempi impiegati) in un *esperimento indiretto* (discesa dei corpi lungo piani inclinati). Dopo aver *estrapolato* i suoi risultati sperimentali (vedi tutta la discussione quantitativa nel secondo capitolo) dedusse la sua conclusione, che doveva avere un carattere generale. In altre parole, secondo il metodo scientifico, *occorre estrapolare dai fenomeni reali gli aspetti primari, progettare spesso un esperimento ideale, dal quale dedurre un modello, i cui risultati dovranno essere riverificati negli esperimenti reali, quando possibile.*

Quello che spesso, però, non viene detto in maniera sufficientemente chiara, quando si parla di metodo scientifico, è che l'estrapolazione degli aspetti primari di un fenomeno non consente spesso di realizzare esperimenti reali. Di qui la presenza frequente, nel metodo galileiano, del *ricorso all'esperimento ideale,* ovvero il ricorso alla riflessione speculativa, pur nata dall'analisi dei fenomeni reali. Talvolta, è solo dagli esperimenti ideali che si riesce ad estrapolare quei caratteri primari di un fenomeno, così indispensabili alla comprensione del fenomeno stesso.

Passiamo ora alla presentazione di alcuni concetti indispensabili per capire il moto dei corpi.

Iniziamo lo studio della "realtà" introducendo il concetto di punto materiale. La Terra è un corpo piuttosto grande, ma nel nostro Sistema Solare se si assume che essa abbia le dimensioni di un punto, le proprietà del suo movimento intorno al Sole si possono descrivere con questa grossolana approssimazione. Abbiamo appena operato una semplificazione della realtà, che si è mostrata piuttosto utile. Nel fare ciò, abbiamo introdotto il concetto di *punto materiale*: Il punto materiale è un oggetto molto piccolo rispetto alle dimensioni dell'ambiente in cui si svolgono dei fenomeni fisici che hanno quell'oggetto come protagonista.

Il punto materiale è, allora, una schematizzazione che facciamo dei corpi materiali, che ci consente, in determinate condizioni, di considerarli senza dimensione, ovvero equivalenti a dei punti matematici. Tuttavia, è chiaro che nessun corpo fisico, per quanto piccolo, può considerarsi in assoluto senza dimensione. Con questa precisazione possiamo dire che la posizione di un punto materiale può essere definita come quella di un punto geometrico.

Fino ad ulteriore avviso il nostro scopo sarà di studiare il moto di un punto materiale.

1.3 Il concetto di spazio

Scriveva Newton: *Non definisco invece, tempo spazio, luogo e moto, in quanto notissimi a tutti. Va notato, tuttavia, come comunemente non si concepiscono queste quantità che in relazione a cose sensibili. Di qui nascono i vari pregiudizi, per eliminare i quali conviene distinguere le medesime quantità in assolute e relative, vere e apparenti, matematiche e volgari. Lo spazio assoluto, per sé senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile; lo spazio relativo è una misura o dimensione mobile dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile; così la dimensione di uno spazio sotterraneo o aereo o celeste viene determinata dalla sua posizione rispetto alla Terra. Lo spazio assoluto e lo spazio relativo sono identici per grandezza e specie, ma non sempre permangono identici in quanto al numero. Infatti se la Terra, per esempio, si muove, lo spazio che contiene la nostra aria, e che, relativamente alla Terra, rimane sempre identico, ora sarà una data parte dello spazio assoluto attraverso cui l'aria passa, ora un'altra parte di esso; e così, senza dubbio, muterà incessantemente.*

Secondo Newton abbiamo allora due tipi di spazi: lo spazio assoluto e lo spazio relativo. Il primo rimane immutabile e serve sostanzialmente da contenitore degli eventi fisici. Su questo spazio "contenitore" nessun fenomeno fisico può avere alcuna influenza. Esso rimane immutabile qualunque evento fisico sia accaduto, accade o accadrà in futuro.

La concezione di uno *spazio contenitore* non era l'unica visione di spazio sostenuta ai tempi di Newton. Basterà ricordare la *concezione relazionale* di spazio, che faceva capo ad Aristotele, secondo la quale lo spazio non è qualcosa di esistente per sè (ovvero in modo indipendente dalla presenza dei corpi che in esso esistono), ma dipende dai corpi in esso contenuti, in virtù delle loro interrelazioni reciproche. Se poi si aggiunge che, sempre per Aristotele, ogni sostanza ha un suo luogo naturale verso il quale essa cerca di ritornare se ne fosse allontanata, arriviamo anche ad una concezione non-omogenea dello spazio stesso.

Rinviando, per ora, la discussione sulle implicazioni del spazio assoluto, ci limiteremo all'analisi dello spazio, in relazione a determinati sistemi di coordinate.

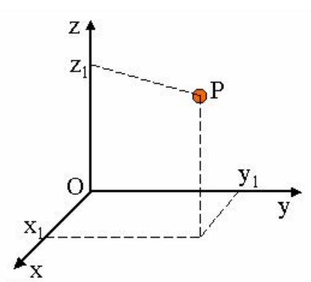
1.4 I sistemi di coordinate

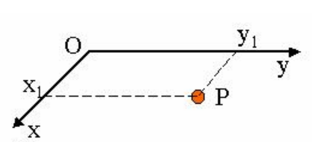
Supponiamo che un punto materiale si muova nello spazio. Risolviamo, prima, il problema della individuazione di un punto immobile nello spazio. *I sistemi di coordinate* svolgono tale compito. Esistono diversi sistemi di coordinate che si differenziano per le modalità con cui vengono individuati i vari punti dello spazio.

Lo spazio relativo della Meccanica Newtoniana trova la sua prima caratteristica attraverso l'esperienza quotidiana. Infatti, l'esperienza quotidiana consente di affermare che *lo spazio della Meccanica Newtoniana è descrivibile mediante la geometria euclidea*.

1.4.1 Le coordinate cartesiane

Un modo per individuare un punto nello spazio euclideo è quello di assegnare tre rette (*assi coordinati*) mutuamente ortogonali intersecantesi in un punto comune (*origine degli assi*) a partire dal quale, utilizzando una comune unità di misura delle lunghezze, si possono misurare i vari segmenti di retta.





Ciascun punto dello spazio può pensarsi individuato dalle intersezioni sui tre assi dei tre piani, passanti per il punto ed ortogonali a ciascun asse. La misura dei segmenti di retta che vanno dall'origine ai punti di intersezione costituiscono le *coordinate cartesiane* del punto materiale. Gli *assi cartesiani* si indicano con le tre seguenti lettere (maiuscole o minuscole) (X, Y, Z) e il punto P indicato nella Fig.1a avrà le coordinate (X_1, Y_1, Z_1).

Nel Sistema Internazionale, che sarà adottato in questo libro, l'unità di misura delle lunghezze è il *metro* (indicato con m).

Poiché una caratteristica essenziale delle scienze è la riproducibilità di ogni esperimento, è chiaro che deve essere definito un *metro campione*, cioé una lunghezza standard rispetto alla quale tutte le altre lunghezze si devono confrontare. La necessità di un unico metro campione fu accettata solo dopo la Rivoluzione Francese e le dimensioni della Terra furono scelte come base per la definizione dell'unità di lunghezza (10^{-7} di un quarto di cerchio meridiano!). Fu preparato, su tale base, una barra di platino e conservata presso l'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres (Francia).

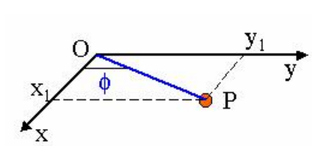
La definizione attuale di metro campione, prescinde dalla conservazione reale di un metro campione e si fonda sulla velocità della luce nel vuoto e sarà data più avanti. Per ora, conveniamo che esso esiste e viene accettato dalla comunità scientifica.

1.4.2 Le coordinate polari

Molto spesso i punti materiali che analizzeremo si muoveranno su dei piani (*moti piani*). In tal caso, gli assi cartesiani si riducono solo a due e conseguentemente un punto materiale può rappresentarsi mediante due coordinate cartesiane, per esempio (x, y). In tal caso, scriveremo

$$P = (x_1, y_1)$$

Un modo alternativo di rappresentare un punto in un piano è quello di dare la sua distanza OP, da un centro, detto *polo* e l'angolo ϕ che la semiretta OP forma con un asse di riferimento, detto *asse polare* (scegliamo l'asse delle x):



Queste nuove coordinate sono dette *polari* e un punto viene individuato dalle coordinate

$$P = (r, \phi)$$

dove abbiamo posto $OP = r$.

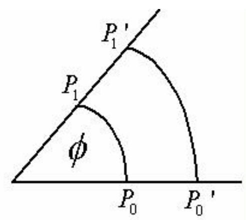
Si può passare da un sistema di coordinate ad un'altro mediante delle trasformazioni. Nel caso in figura, le trasformazioni dal sistema di coordinate polari a quelle cartesiane sono:

$$x = r\cos\phi \qquad\qquad y = r\sin\phi \tag{1}$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \qquad\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Lo strumento per misurare gli angoli si chiama *goniometro*. In geometria si preferisce misurare l'ampiezza di un angolo in *gradi sessagesimal*i ($^{\circ}$) Il grado è la 360 parte di un angolo giro. Nel S.I. l'unità di misura dell'angolo piano è il *radiante* (*rad*). La misura dell'angolo ϕ,



come rapporto tra la misura dell'arco e il raggio corrispondente

$$\phi = \frac{P_0P_1}{\mathrm{r}} = \frac{P_0'P_1'}{\mathrm{r}'}$$

è detta misura in *radianti* (rad) dell'angolo considerato:

$$\phi_{rad} = \frac{s}{r} \tag{3}$$

La misura di un angolo, quando è espressa in radianti, essendo il rapporto di due lunghezze, è *senza dimensioni*.

A cosa corrisponde un angolo che misura esattamente un radiante? L'ampiezza dell'angolo al centro che corrisponde ad un arco di circonferenza pari al raggio, è uguale ad un radiante. Allora, il *radiante* è la misura di un angolo piano, con il vertice nel centro di una circonferenza, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Se si ricorda che la lunghezza di una circonferenza è $2\pi R$, si può dire che in una circonferenza sono contenuti 2π archi lunghi quanto il raggio e che quindi un angolo giro è uguale a 2π radianti o se si preferisce il radiante è la 2π parte di un angolo giro. La relazione tra le due unità si deduce dalla seguente uguaglianza:

$$\frac{\phi^{\circ}}{360} = \frac{\phi_{rad}}{2\pi}$$

Esplicitando si trova che

$$1rad \simeq 57,29^{\circ} \qquad\qquad 1^{\circ} \simeq 0,02rad$$

1.5 I vettori

In principio, tutti possono riprodurre un esperimento e formulare leggi fisiche. Di conseguenza esistono una infinità di sistemi di riferimento da cui analizzare la realtà. Una richiesta ragionevole per l'analisi della realtà fisica sembrerebbe quella che la formulazione delle leggi fisiche sia indipendente dalla scelta del sistema di assi coordinati. Il linguaggio dei vettori offre una tale possibilità.

Definizione (*Parte prima*): Un *vettore* è una grandezza fisica caratterizzata da una *direzione*, un *verso* e un *valore numerico* (o *modulo* o *intensità*).

Indicheremo col simbolo $\mathbf{a}$ il generico vettore; il suo modulo con $|\mathbf{a}|$ o con la semplice lettera a . Con il simbolo $\mathbf{u}_a$ indicheremo il *versore* (ovvero il vettore di modulo unitario) associato al vettore $\mathbf{a}$. Il versore $\mathbf{u}_a$ ha la stessa direzione e verso di $\mathbf{a}$ ma il suo modulo, nel sistema di unità di misura delle lunghezze usato, vale uno. Allora, si può rappresentare un vettore anche nel seguente modo:

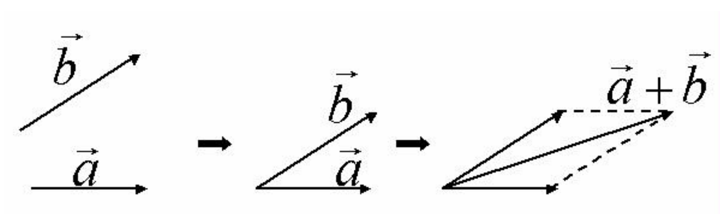
$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{u}_a = a\mathbf{u}_a \tag{4}$$

I vettori di cui per il momento vogliamo parlare sono quelli detti *liberi*. Un tale vettore non è necessariamente localizzato in un particolare punto dello spazio, per cui due vettori possono confrontarsi. Sulla base della *validità della geometria euclidea*, su cui si fonda anche l'uso corrente dei vettori, è possibile definire la proprietà fondamentale dei vettori.

Proprietà fondamentale dei vettori: la somma

Nello spazio un vettore è rappresentabile graficamente da un segmento orientato. La lunghezza del segmento rappresenta, in rapporto ad una determinata unità di misura, il valore del modulo, la direzione del segmento è la direzione del vettore, mentre il verso è indicato da una cuspide.

La somma di due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è un terzo vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ che si ottiene dai primi due usando la regola del parallelogramma:



Tale operazione gode della *proprietà commutativa*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \tag{5}$$

della *proprietà associativa*:

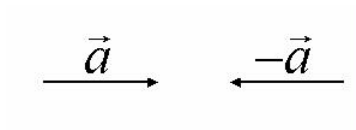
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \tag{6}$$

Definizione: I *vettori* sono grandezze fisiche con un modulo, una direzione e un verso che si sommano secondo la regola del parallelogramma.

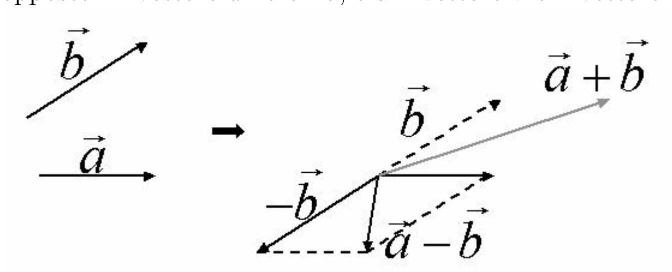
Quale significato dobbiamo dare alla *differenza* di due vettori **a** e **b**?

Definiamo prima il vettore $-\mathbf{a}$. Esso corrisponde ad un vettore che annulla il vettore **a**:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{7}$$



In altre parole, il vettore $-\mathbf{a}$ ha lo stesso modulo e direzione di **a**, ma di verso opposto. Il vettore differenza, tra il vettore **a** e il vettore **b**



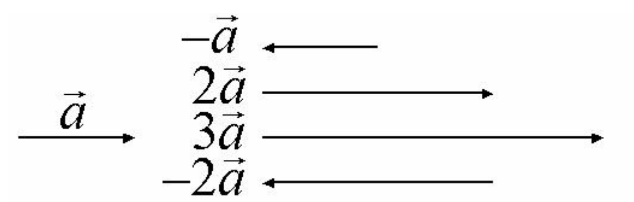
è il vettore somma tra il vettore **a** ed il vettore $(-\mathbf{b})$:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{8}$$

Definizione: Una grandezza *scalare* è una grandezza che viene completamente caratterizzata da un valore numerico (intensità).

Il prodotto di una quantità scalare k e di un vettore **a** è un nuovo vettore che ha la stessa direzione e verso di **a** e modulo pari al prodotto di k per il modulo del vettore **a**, cioè:

$$k\mathbf{a} \equiv ka\mathbf{u}_a \tag{9}$$



La moltiplicazione di un vettore per uno scalare gode della *proprietà distributiva*:

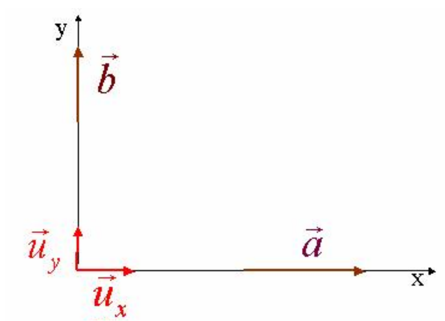
$$k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b} \tag{10}$$

1.5.1 Rappresentazione cartesiana dei vettori

I versori degli assi cartesiani (x, y, z) saranno indicati con

$$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$$

Supponiamo di avere un vettore $\mathbf{b}$ che giace lungo l'asse y e un vettore $\mathbf{a}$ che giace lungo l'asse x.



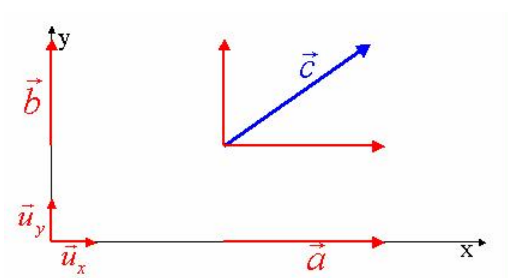
Poiché il versore $\mathbf{u}_y$ determina la direzione e il verso positivo dell'asse y, mentre il versore $\mathbf{u}_x$ determina la direzione e il verso positivo dell'asse x, potremo scrivere

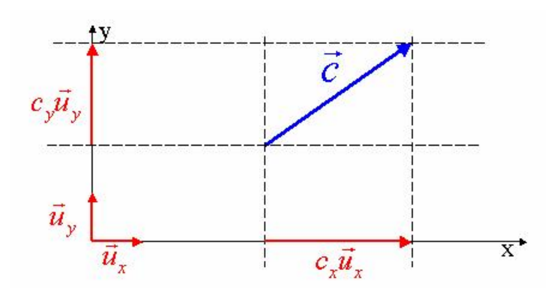
$$\mathbf{a} = a\mathbf{u}_x \qquad \mathbf{b} = b\mathbf{u}_y$$

Usando i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, potremo costruire il vettore somma $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Il vettore $\mathbf{c}$ appartiene al piano xy e si potrà scrivere

$$\mathbf{c} = a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y$$

Poiché, i versori non cambiano, gli scalari (a, b) caratterizzano in maniera univoca il vettore $\mathbf{c}$ (vedi figura sotto, a sinistra)





Il procedimento che associa a due vettori, uno posto sull'asse x e l'altro sull'asse y, un terzo vettore del piano, in maniera univoca, è un'operazione analoga (vedi figura sopra, a destra). Più precisamente, ad ogni vettore $\mathbf{c}$ del piano xy possiamo associare, in maniera univoca, due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in maniera tale che

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

ovvero

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{u}_x + c_y \mathbf{u}_y$$

dove (c_x, c_y) sono dette *componenti cartesiane* del vettore $\mathbf{c}$.

Consideriamo un vettore $\mathbf{a}$ in un piano. Se (a_x, a_y) sono le sue componenti cartesiane, usando il teorema di Pitagora possiamo scrivere

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{11}$$

Inoltre, l'angolo che forma il vettore con l'asse x sarà dato da

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{12}$$

Conoscendo le componenti cartesiane siamo in grado di determinare sia il modulo che la direzione del vettore.

L'estensione alle *tre dimensioni* dello spazio è immediata. Un vettore dello spazio potrà scriversi

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z \tag{13}$$

dove (a_x, a_y, a_z) sono le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{a}$.

In ogni momento, possiamo sostituire ad un vettore la sua rappresentazione cartesiana e viceversa.

1.5.2 Il prodotto scalare tra due vettori

Definizione: Il *prodotto scalare* tra due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (e lo indicheremo con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) è uno scalare definito dal seguente valore

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\theta \tag{14}$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori.

Valgono per tale prodotto sia la proprietà commutativa che quella distributiva:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{15}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{16}$$

Se i due vettori sono uguali, avremo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \tag{17}$$

ovvero, il modulo di un vettore, si può anche scrivere

$$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \tag{18}$$

Il prodotto scalare può servire a calcolare la lunghezza di un vettore.

Notiamo, ancora, che essendo il prodotto scalare determinato dal coseno dell'angolo compreso tra i due vettori, se i due vettori sono ortogonali il prodotto scalare è nullo. Per tale proprietà, il prodotto scalare può essere usato per imporre la condizione di ortogonalità tra due vettori, oppure per verificare una ortogonalità tra due direzioni.

Ogni vettore, abbiamo visto, si può rappresentare mediante le sue componenti in un determinato sistema di riferimento cartesiano. Si può facilmente mostrare che se si conoscono le componenti cartesiane, di due vettori

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z$$

il prodotto scalare si può scrivere:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{19}$$

Per provare la (19), basta fare i prodotti ed osservare che

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = 0$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1$$

Dalla (19) segue che

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{20}$$

cioè, il modulo di un vettore è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle singole componenti cartesiane.

Il prodotto scalare tra due vettori ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) può anche essere visto, come il prodotto del modulo di $\mathbf{a}$ per la proiezione di $\mathbf{b}$ nella direzione $\mathbf{a}$ e viceversa. In particolare, le componenti cartesiane di un vettore si possono scrivere

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_x \qquad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_y \qquad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_z \tag{21}$$

Più in generale, se $\mathbf{u}_n$, è il versore di una generica direzione, la componente del vettore $\mathbf{a}$ nella direzione n sarà

$$a_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n \tag{22}$$

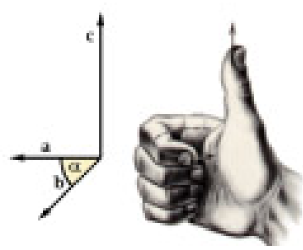
1.5.3 Il prodotto vettoriale tra due vettori

Definizione: Il *prodotto vettoriale* tra due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (e lo indicheremo con $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$) è un vettore con direzione ortogonale al piano individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e modulo dato dalla seguente relazione

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = ab \sin \alpha \tag{23}$$

Per la determinazione del verso si possono adottare diverse regolette equivalenti.

La regola della *mano destra*: se con le dita si segue la sovrapposizione del vettore $\mathbf{a}$ sul vettore $\mathbf{b}$, il verso è indicato dal pollice



Il prodotto vettoriale è anticommutativo:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \tag{24}$$

Il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \tag{22}$$

Non è difficile provare che valgono per i versori degli assi cartesiani le seguenti relazioni:

$$\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \qquad \mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x \qquad \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \tag{23}$$

In tal caso si dice che la terna di assi cartesiani è *destrorsa*.

La *rappresentazione cartesiana* del prodotto vettoriale tra due vettori si scrive

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\, \mathbf{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\, \mathbf{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, \mathbf{u}_z \tag{24}$$

La prova della (24) si fonda sulle relazioni (23).

Una regola mnemonica per ricavare le componenti cartesiane del prodotto vettoriale è la risoluzione del seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Si ha, cancellando ogni volta la riga e la colonna relativa ad un dato versore,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{u}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{u}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{u}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

e risolvendo i determinanti dei vari minori ottenuti si arriva al risultato (24).

Inoltre, osserviamo che il *modulo del prodotto vettoriale* tra due vettori **a** e **b** è uguale all'*area del parallelogramma individuato da essi* (Problema N.4).

1.6 I vettori del moto

I vettori che introdurremo nelle prossime sezioni di questo capitolo costituiscono le basi su cui si costruisce ogni altro concetto relativo al moto dei corpi. La loro comprensione è allora un prerequisito per ogni altro approfondimento di concetti relativi al moto dei corpi.

1.6.1 Il concetto di tempo

Finora abbiamo discusso di geometria e di algebra vettoriale, individuando lo spazio che ci circonda e che *contiene* tutti i punti materiali come uno spazio euclideo (in termini non rigorosi si può dire che lo spazio euclideo è quello in cui vale tutta la geometria che si studia nelle scuole superiori; quella per intenderci per la quale la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi e le rette parallele non si incontrano mai). Abbiamo già detto che uno dei nostri scopi è quello di descrivere il movimento dei corpi. Il movimento di un corpo, per ora un punto materiale, presuppone l'occupazione da parte del punto materiale di differenti punti dello spazio in *istanti successivi.* Abbiamo bisogno di introdurre, nella geometria, il concetto di tempo.

Scriveva Newton: *Il tempo assoluto, vero matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, l'anno.*

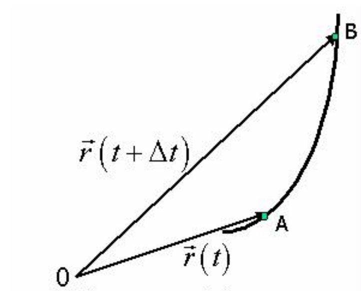
Si può, allora, dire che nella meccanica newtoniana, accanto allo spazio assoluto (contenitore dei fenomeni) esiste, e indipendente da esso, il tempo assoluto. Allo stesso modo in cui le tre dimensioni spaziali sono indipendenti le une dalle altre, così il tempo assoluto è indipendente dalle tre coordinate spaziali, ma anche dagli stessi fenomeni fisici. Esso infatti scorre uniformemente. Di tale tempo non viene data spiegazione ma solo lo si descrive. Esso sarà il supporto per il moto uniforme ed è in stretta connessione con il concetto newtoniano di spazio assoluto. Altre considerazioni su tale tempo saranno svolte successivamente. Ora vogliamo solo ribadire che esso esiste ed evolve in maniera uniforme.

Abbiamo tuttavia la necessità di misurare lo scorrere del tempo, quello relativo e volgare. Non vi è alcun dubbio sulla seguente affermazione: *esistono in natura dei fenomeni periodici.* La rotazione della Terra intorno al Sole, la rotazione della Terra intorno al suo asse, la rotazione della Luna intorno alla

Terra e così via, per rimanere agli esempi più ovvi. Si può allora confrontare un fenomeno fisico che muta nel tempo con uno qualunque dei fenomeni periodici che si presentano in natura. Più il fenomeno periodico è stabile, più il confronto è oggettivo. Un fenomeno fisico molto stabile è quello della costanza della frequenza di un'opportuna radiazione emessa in una transizione quantica di un atomo di Cesio (vedi la definizione attuale del secondo in un prossimo paragrafo di questo capitolo). Questo *orologio atomico* è lo strumento cui si può pensare per misurare lo scorrere del tempo. Se vogliamo essere pignoli, penseremo che un osservatore, *fermo in un opportuno sistema di riferimento*, possiede per le sue misure un orologio atomico. Altrimenti un buon orologio, per le nostre considerazione, è sufficiente. Risulta palese che il tempo relativo presuppone l'esistenza di uno spazio fisico in cui avvengono i processi periodici. In altre parole, senza i processi periodici il tempo relativo non esisterebbe.

1.6.2 I vettori posizione, spostamento e velocità

Un punto materiale che si muove nello spazio descrive una *traiettoria*: essa è il luogo dei punti dello spazio occupati successivamente dal punto materiale



In Figura, la curva disegnata costituisce una ragionevole visualizzazione di una probabile traiettoria. Sulla traiettoria sono indicati due punti, A e B, raggiunti dal punto materiale in due istanti di tempo distinti t e $t + \Delta t$.

Il simbolo Δ è un operatore che posto prima di una qualunque grandezza fisica (in questo caso il tempo t) rappresenta l'intervallo tra due valori successivi della grandezza fisica che esso precede. In altre parole, se indichiamo con t' il tempo segnato quando il punto materiale è nel punto B, possiamo scrivere

$$\Delta t = t' - t \tag{25}$$

e ciò giustifica la nostra notazione $\mathbf{r}_B\,(t') = \mathbf{r}_B\,(t + \Delta t)$.

Definizione: Se si sceglie un punto di osservazione O, i punti A e B possono individuarsi con i due vettori $\mathbf{r}_A\,(t)$ e $\mathbf{r}_B\,(t + \Delta t)$ detti *vettori posizione* di A e B rispettivamente.

La determinazione del moto di un punto materiale consiste nella determinazione del vettore posizione per ogni istante di tempo, cioè, occorre trovare la seguente funzione vettoriale:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t) \tag{26}$$

Se il nostro sistema di riferimento è un sistema di assi cartesiani, la determinazione della funzione vettoriale (26) è equivalente alla determinazione delle tre seguenti funzioni scalari:

$$x = x\,(t) \qquad\qquad y = y\,(t) \qquad\qquad z = z\,(t) \tag{27}$$

Quando il punto P descrive la sua traiettoria, la proiezione di $\mathbf{r}\,(t)$ lungo gli assi cartesiani genera tre moti rettilinei, descritti dalle (27). Tali equazioni sono delle equazioni parametriche e se si elimina t dalle (27) si ottiene la descrizione della traiettoria mediante delle equazioni in x, y e z.

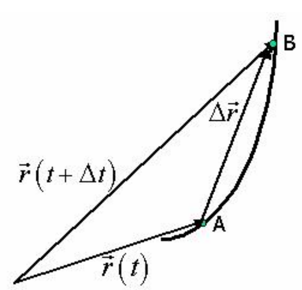
Abbiamo appena detto che lo scopo della meccanica è determinare la traiettoria di un punto materiale o, ciò che è equivalente, determinare la variazione nel tempo del vettore posizione. Per poter portare a termine il nostro progetto avremo bisogno di capire perché i corpi si muovono o, se si preferisce, chi sono i responsabili del movimento. La risposta corretta al nostro quesito fu data da Newton, che per primo capì che le cause del movimento sono le forze agenti sui corpi (vedi prossimo capitolo) e il loro effetto è produrre variazioni di velocità. In altre parole, i responsabili del movimento, cioè le forze, non sono direttamente legate al vettore spostamento, la cui determinazione è lo scopo della meccanica ma ad altre quantità, cioè alle variazioni di velocità. Dovremo allora, definire la velocità e poi capire cosa sia una variazione di velocità, ovvero cosa sia un'accelerazione. Infine, dovremo imparare come dalla conoscenza dell'accelerazione, si possa determinare la traiettoria.

Introduciamo un secondo vettore.

Definizione: Il vettore

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B\,(t + \Delta t) - \mathbf{r}_A\,(t) \tag{28}$$

è detto *vettore spostamento*. L'arco di traiettoria AB è indicato con Δs .



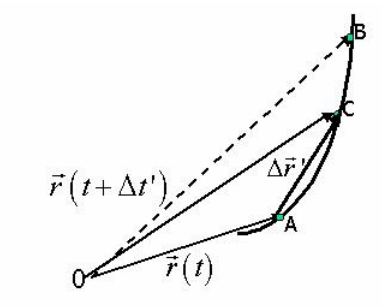
Se si divide tale vettore per l'intervallo temporale Δt si ottiene un nuovo vettore, detto velocità media.

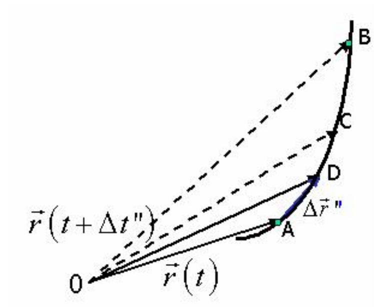
Definizione: Il vettore

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{29}$$

è chiamato *velocità media*, nell'intervallo di tempo Δt. Se il valore di Δt cambia, cambierà anche la velocità media. Seguiamo in maggior dettaglio cosa succede alla velocità media se si varia l'intervallo temporale.

Supponiamo di prendere un intervallo temporale $\Delta t'$ più piccolo di Δt. Avremo, in corrispondenza di tale intervallo, un nuovo vettore spostamento $\Delta \mathbf{r}'$, (vedi figura sotto a sinistra)





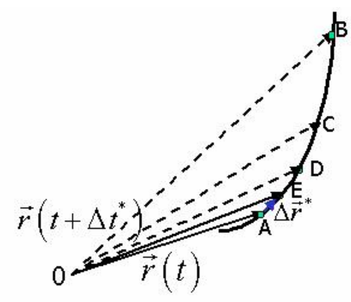
e quindi un nuovo vettore velocità media:

$$\mathbf{v}'_m = \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t'} \tag{30}$$

Come si comprende facilmente dalle due ultime figure, i due vettori velocità media, $\mathbf{v}_m$ e $\mathbf{v}'_m$ sono, in generale, differenti. Possiamo proseguire e prendere un intervallo temporale $\Delta t''$ ancora più piccolo di $\Delta t'$ (vedi figura sopra a destra). Avremo un nuovo vettore spostamento e una nuova velocità media

$$\mathbf{v}''_m = \frac{\Delta \mathbf{r}''}{\Delta t''} \tag{31}$$

Anche in questo caso, il nuovo vettore velocità media è, in generale, differente dai precedenti. Notiamo, tuttavia, che man mano che l'intervallo temporale si riduce, il vettore spostamento, almeno graficamente, si confonde sempre di più con la traiettoria. Possiamo allora dire che, da un lato, la riduzione dell'intervallo temporale porta a vettori spostamenti più vicini alla traiettoria reale, ma dall'altro sembrerebbe che tutti i vettori velocità media che si ottengono sono tutti differenti gli uni dagli altri e ciò comporta che non si ha un'indicazione precisa su quando arrestare il processo. In realtà, l'operazione di riduzione dell'intervallo temporale non prosegue all'infinito, perché in un modo che l'analisi matematica precisa in maniera quantitativa, tutti i vettori velocità media, al di sotto di un certo intervallo temporale "tendono ad un valore unico".



Più precisamente, si può provare, in maniera rigorosa, che esiste un intervallo temporale Δt^* oltre il quale non ha più senso calcolare la velocità media, perché, per tutti gli intervalli temporali più piccoli di Δt^* i valori che si trovano della velocità coincidono con la velocità media associata all'intervallo Δt^*:

$$\mathbf{v}_m^* = \frac{\Delta \mathbf{r}^*}{\Delta t^*} \tag{32}$$

Si dice, in tal caso, che nel limite in cui l'intervallo temporale tende a zero, e si scrive ($\Delta t \to 0$), il rapporto (detto *rapporto incrementale*) $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ tende ad un vettore unico, che indicheremo con $\mathbf{v}(t)$, la cui direzione è tangente alla traiettoria, all'istante t.

Ha senso allora definire il seguente vettore velocità:

Definizione: Il limite della seguente quantità

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{33}$$

definisce il *vettore velocità istantanea* o semplicemente *velocità*. L'operazione di limite, indicata nella definizione della velocità prende il nome di *derivata temporale del vettore posizione* e si indica anche con

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \tag{34}$$

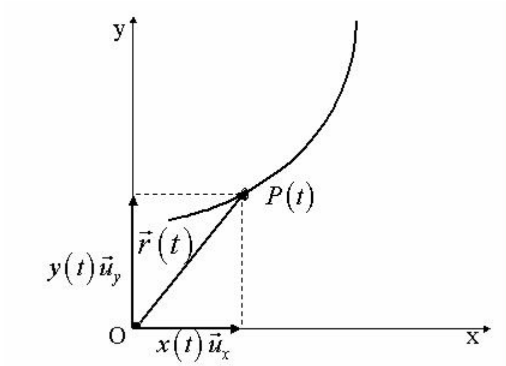
Le dimensioni della velocità sono quelle di una lunghezza su un tempo:

$$\mathrm{v} = \frac{[L]}{[T]}$$

dove L indica una lunghezza e T un tempo. Nel Sistema Internazionale (SI), la velocità si misura in metri su secondi: m/s.

1.7 L'osservatore e le sue operazioni

Abbiamo già detto che l'osservatore è il cardine dell'indagine fisica. Senza osservatore non potremmo spiegare gli eventi perché non avremmo chi li descrive e raccoglie i dati. L'osservatore possiede un metro e un orologio, e di conseguenza, non potrà che *fare misure di lunghezza e di tempo*. Potrà il nostro osservatore con il suo modo di operare (con misure di lunghezza e tempo) dare corpo ai concetti che in maniera generale abbiamo presentato?. Per semplificare la nostra discussione supponiamo che il punto materiale descriva una traiettoria piana. L'osservatore, ricordando che può fare solo misure di lunghezza decide di introdurre gli assi cartesiani del piano, aventi origine nella sua posizione:



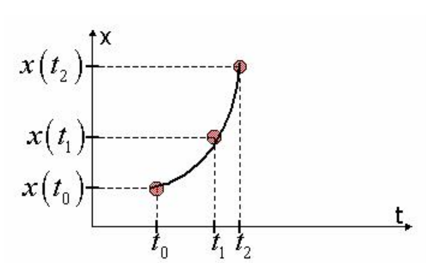
Egli è in grado di misurare la distanza del punto P dall'origine ed è in grado di misurare gli angoli che il vettore posizione forma con gli assi cartesiani, che si è scelto. Egli è in grado di costruire le proiezioni lungo gli assi cartersiani del vettore posizione, ben sapendo, che esiste una corrispondenza biunivoca tra il vettore posizione e le sue due proiezioni:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{u}_x + y(t)\mathbf{u}_y \qquad (35)$$

Poiché i versori degli assi sono immutabili, la determinazione del vettore posizione è ricondotta alla determinazione delle funzioni $x\,(t)$ e $y\,(t)$. La determinazione di queste due funzione è proprio ciò che egli sa fare. Egli può determinare, man mano che il punto materiale si sposta, qual'è il valore delle variabili x e y in funzione del tempo. Vediamo di descrivere le operazioni lungo l'asse x. L'osservatore raccoglie una serie di coppie di valori:

$$(t_0, x_0)\,, (t_1, x_1)\,, (t_2, x_2)\,, (t_3, x_3)\,, (t_4, x_4)$$

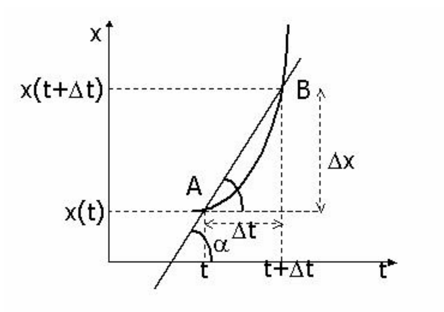
Con queste coppie può costruire una tabella a due colonne, ponendo nella prima colonna i valori dei tempi e nella seconda i corrispondenti valori delle lunghezze. Molto meglio, per comprendere i dati che si stanno analizzando, si può fare un grafico ponendo sulle ascisse i tempi e sulle ordinate i valori delle lunghezze corrispondenti:



Ha costruito, quello che si chiama *diagramma orario* del moto lungo l'asse x. Può ripetere le stesse considerazioni per l'asse y. Può anche chiedersi quale sia la migliore curva che approssima tutti i dati che ha raccolto e avere la forma analitica della curva:

$$x = x\left(t\right)$$

Egli ha determinato la *legge oraria* del moto lungo l'asse x. Provvede a fare un grafico e poi ad esaminarlo:



Guarda il grafico e si accorge che

$$\mathrm{v}_{x,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

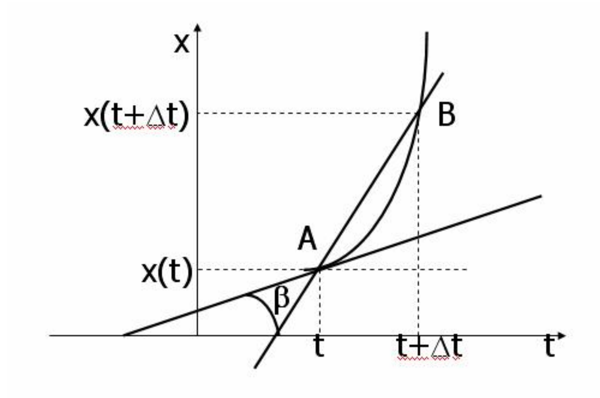
è la velocità media, lungo l'asse x, del punto materiale. Poiché si può vedere che

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

conclude che, geometricamente, la velocità media nell'intervallo Δt è uguale al *coefficiente angolare della retta che passa per l'inizio e la fine dell'intervallo temporale*, cioè la retta che passa per A e B. Quando riduce l'intervallo temporale trova sempre valori differenti della velocità media, fino ad arrivare ad un intervallo temporale oltre il quale non ha più senso andare perché tutti i valori della velocità media che trova sono uguali. Ha trovato il valore della velocità, lungo l'asse x, del punto materiale, al tempo t:

$$\mathrm{v}_x\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{36}$$

Geometricamente



la velocità, lungo l'asse x, del punto materiale è uguale al *coefficiente angolare della retta tangente alla curva oraria, al tempo t.*

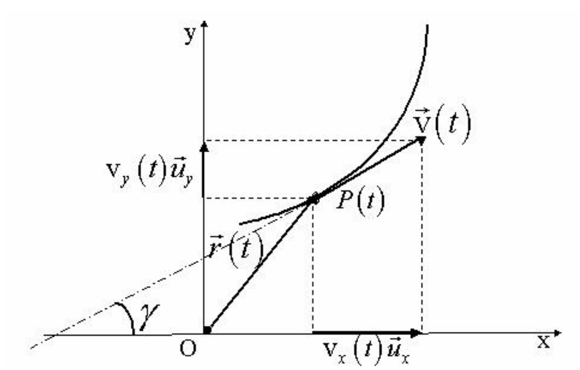
Analoghe considerazioni possono essere svolte lungo l'asse y:

$$\mathrm{v}_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

dove la componente della velocità lungo l'asse y rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva oraria $y = y(t)$, al tempo t. L'osservatore è ora in grado di determinare la velocità reale del punto materiale al tempo t (vettore tangente *alla traiettoria* al tempo t). Egli sa che

$$\mathbf{v}(t) = \mathrm{v}_x(t)\,\mathbf{u}_x + \mathrm{v}_y(t)\,\mathbf{u}_y \tag{37}$$

Graficamente si ha



Inoltre, è in grado di determinare il modulo del vettore velocità

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2(t) + \mathrm{v}_y^2(t)} \tag{38}$$

e l'angolo che il vettore velocità forma con l'asse delle x:

$$\tan\gamma = \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}_x} \tag{39}$$

Le considerazioni appena svolte possono essere estese alle tre dimensioni e si ottengono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{u}_x + y(t)\mathbf{u}_y + z(t)\mathbf{u}_z$$

Se si indicano con $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ le componenti cartesiane del vettore spostamento $\mathbf{\Delta r}$, allora, per ogni componente, possiamo scrivere

$$\mathrm{v}_x\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \mathrm{v}_y\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad \mathrm{v}_z\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

dove $\left(\mathrm{v}_x\left(t\right), \mathrm{v}_y\left(t\right), \mathrm{v}_z\left(t\right)\right)$ rappresentano le componenti cartesiane della velocità:

$$\mathbf{v}\left(t\right) = \mathrm{v}_x\left(t\right)\mathbf{u}_x + \mathrm{v}_y\left(t\right)\mathbf{u}_y + \mathrm{v}_z\left(t\right)\mathbf{u}_z$$

Le componenti della velocità saranno legate alle componenti del vettore posizione dalle seguenti relazioni:

$$\mathrm{v}_x\left(t\right) = \frac{dx}{dt} \qquad \mathrm{v}_y\left(t\right) = \frac{dy}{dt} \qquad \mathrm{v}_z\left(t\right) = \frac{dz}{dt}$$

In termini di tali componenti si può scrivere il modulo di $\mathbf{v}\left(t\right)$:

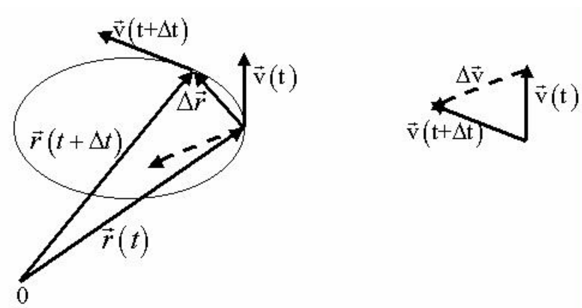
$$\left|\mathbf{v}\left(t\right)\right| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2\left(t\right) + \mathrm{v}_y^2\left(t\right) + \mathrm{v}_z^2\left(t\right)}$$

Il primo passo nella costruzione del modello di risoluzione del problema del moto è stato risolto. Non è difficile rendersi conto che, da un punto di vista geometrico, se si conoscono le tangenti ad ogni punto di una traiettoria, si può risalire alla traiettoria medesima. Se le cause del movimento, cioè le forze, fossero legate, come pensava Aristotele, alle velocità di un corpo, potremmo anche fermarci al concetto di velocità. Tuttavia, abbiamo già detto che le forze sono legate alle variazioni di velocità, per cui avremo bisogno di introdurre anche il concetto di accelerazione.

1.8 Il vettore accelerazione

Non rimane che introdurre, come abbiamo fatto per il moto lungo una linea retta, il vettore accelerazione.

La velocità di un punto in movimento è un vettore che varia nel corso del tempo. Supponiamo di avere un punto materiale che si muove su di una traiettoria e per il quale siano note le velocità nei vari punti. Per esempio,



Possiamo formare il vettore $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$, che abbiamo anche riprodotto nell'angolo sinistro e definire il vettore *accelerazione media*, nell'intervallo Δt:

$$\mathbf{a}_m(t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Se si prende un intervallo temporale più breve, si può calcolare una nuova accelerazione media, che risulterà differente dalla precedente. Cambiando ancora intervallo temporale l'accelerazione media continua a cambiare fino a che si raggiunge un valore unico dell'accelerazione. Come per la velocità, ha senso definire il seguente vettore.

Definizione: Poiché il vettore velocità è definito ad ogni istante di tempo, è possibile definire a partire da esso, un nuovo vettore

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{40}$$

detto *accelerazione*. Ricordando che la velocità è la derivata del vettore spostamento, l'accelerazione si può anche scrivere

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \tag{41}$$

Componenti cartesiane: Come per gli altri vettori, del vettore accelerazione si può considerare la sua rappresentazione cartesiana e scrivere che

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{42}$$

Vedremo più avanti come dall'accelerazione si potrà risalire alla traiettoria di un corpo in movimento.

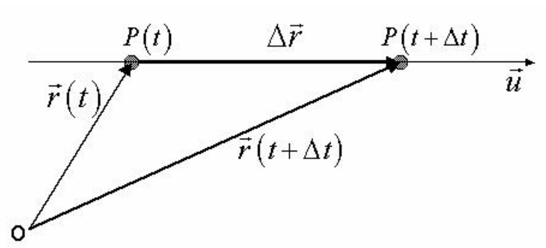
Le dimensione dell'accelerazione sono quelle di una lunghezza sul quadrato di un tempo:

$$a = \frac{[L]}{[T^2]}$$

e nel Sistema Internazionale l'accelerazione si misurerà in metri su secondi al quadrato: m/s^2.

1.9 Moto rettilineo

Esaminiamo, in qualche dettaglio, il moto di un punto materiale lungo una traiettoria rettilinea. In tal caso, avremo:



Il vettore spostamento,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t + \Delta t) - \mathbf{r}\,(t)$$

e con essa la velocità media, avranno una direzione precisa: la loro direzione è lungo la traiettoria rettilinea. Il punto materiale, può arrestarsi ($\Delta\mathbf{r} = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$) e può anche cambiare direzione di moto sulla traiettoria. In tal caso, il vettore spostamento ha verso opposto a quello precedente e così la velocità media.

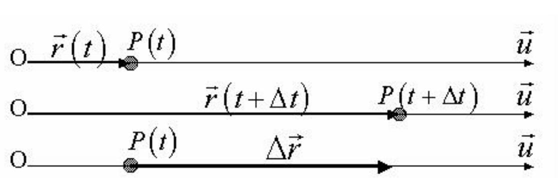
Se si prende un intervallo temporale più piccolo, si troverà ancora che il vettore spostamento e la velocità media associata ad esso avranno la direzione della traiettoria rettilinea. Possiamo, allora, concludere dicendo che il vettore velocità, nel moto rettilineo uniforme, ha la direzione della traiettoria rettilinea. Questo risultato era atteso perché la tangente, in un qualunque punto di una retta, ha la direzione della retta stessa.

Possiamo dire che se si sceglie, un versore $\mathbf{u}$ della retta rappresentante la traiettoria, potremo sicuramente scrivere:

$$\mathbf{v}\,(t) = \pm\mathrm{v}\,(t)\,\mathbf{u}$$

dove il versore, non cambia nel tempo.

Supponiamo ora di porre l'osservatore sulla traiettoria, in un punto arbitrario. I vettori posizione e spostamento saranno



Se si confrontano le figure fatte con l'osservatore fuori dalla traiettoria e quelle fatte con l'osservatore sulla traiettoria, si noterà che, mentre i vettori posizione sono differenti, i vettori spostamenti e con essi i vettori velocità sono gli stessi, indipendentemente dagli osservatori. Possiamo concludere dicendo che, se i due osservatori sono *fermi*, l'uno rispetto all'altro, i vettori velocità non dipendono dall'osservatore.

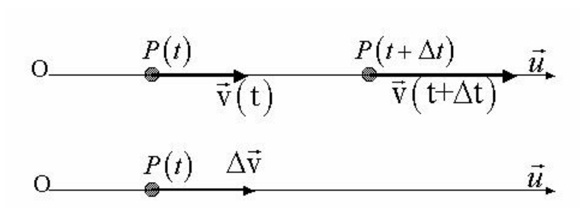
Se si introduce un versore $\mathbf{u}$, della retta rappresentante la traiettoria, potremo scrivere

$$\mathbf{r}(t) = \pm r(t)\,\mathbf{u} \qquad \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} = \pm\boldsymbol{\Delta} r\mathbf{u} \qquad \mathbf{v}(t) = \pm \mathrm{v}(t)\,\mathbf{u} \tag{43}$$

Poiché il versore non muta nel tempo, una sola variabile è sufficiente a descrivere il moto del punto materiale (si veda il moto su traiettoria prestabilita per una generalizzazione di un tale discorso).

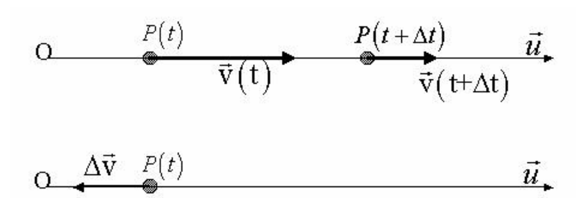
Passiamo all'esame dell'accelerazione. Supponiamo di avere i seguenti vettori velocità e variazione di velocità:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$$



Possiamo vedere che il vettore variazione della velocità è diretto lungo la direzione della traiettoria rettilinea e quindi nella stessa direzione sarà diretta l'accelerazione del punto materiale. Quando l'accelerazione è diretta nella direzione del moto, il moto si dirà *accelerato*.

Quello precedente rappresentava il caso in cui il punto materiale stava aumentando la propria velocità nel corso del tempo. Ma può anche succedere che la velocità subisca una diminuzione. In tal caso, si avrebbe:



e il punto materiale si dice che ha un moto *decelerato*.

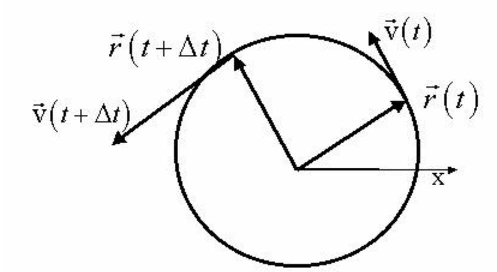
Infine, può presentarsi il caso in cui il punto materiale, nel suo moto e durante un certo intervallo di tempo non subisca alcuna variazione di velocità. Allora, i vettori velocità, nei punti P(t) e P$(t+\Delta t)$ sono uguali. Il vettore variazione della velocità sarà nullo e con esso l'accelerazione:

$$\Delta\mathbf{v} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{a} = 0$$

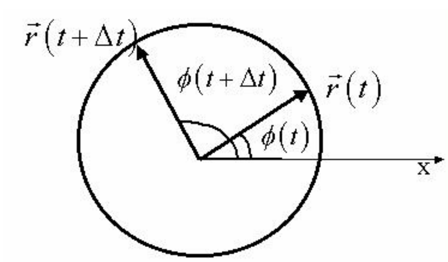
In tal caso, si dice che il moto del punto materiale è *rettilineo uniforme*.

1.10 Moto circolare

Un punto materiale che si muove lungo una determinata circonferenza, di raggio r, si dice che si muove di *moto circolare*.



Poiché il *modulo del vettore posizione non cambia nel tempo*, conviene usare le coordinate polari, e utilizzare solo la variabile angolare per descrivere la posizione del punto materiale.



Usando la misura di un angolo in *radianti* (rad) possiamo valutare la *rapidità di rotazione* del raggio vettore, la variazione angolare, nell'intervallo di tempo Δt sarà espressa da

$$\frac{\phi\,(t+\Delta t)-\phi\,(t)}{\Delta t}$$

che chiameremo *velocità angolare media:*

$$\omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

La velocità angolare media dipende dall'intervallo di tempo considerato ma, come per la velocità (lineare e per l'accelerazione) nel limite in cui l'intervallo temporale tende a zero, la velocità angolare media tende ad un valore unico detto, *velocità angolare,* ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \qquad (44)$$

Quando $\omega = \omega_0$ è *costante*, il moto è detto *circolare uniforme.*

Se il moto *non* è circolare uniforme, possiamo definire l'*accelerazione angolare media*:

$$\alpha_m = \frac{\omega\left(t + \Delta t\right) - \omega\left(t\right)}{\Delta t}$$

e quindi l'accelerazione angolare, con il solito procedimento di limite:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega\left(t + \Delta t\right) - \omega\left(t\right)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{45}$$

In definitiva, potremo scrivere

$$\alpha = \frac{d^{2\phi}}{dt^2} \tag{46}$$

Si dice che l'accelerazione angolare è la derivata temporale seconda dell'angolo.

1.10.1 Periodo e frequenza

Il tempo impiegato dal punto materiale a percorrere un'intera circonferenza è detto *periodo* del moto circolare uniforme e si indica con T.

Possiamo determinare il legame tra il periodo e la velocità angolare usando la definizione di quest'ultima. In un periodo, il raggio vettore è ruotato di 360 gradi; il valore in radianti di tale angolo è 2π. Per ottenere la velocità angolare basterà dividere per il tempo impiegato a percorrere tutto l'angolo giro:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{47}$$

Se moltiplichiamo ambo i membri di tale relazione per il raggio della circonferenza, avremo

$$\omega_0 r = \frac{2\pi r}{T}$$

che ci consente di trovare il legame tra la velocità tangenziale e la velocità angolare

$$\omega_0 r = \mathrm{v} \tag{48}$$

L'inverso del periodo si chiama *frequenza*, ν:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{49}$$

La velocità angolare ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, $1/\left[T\right]$ e nel *Sistema Internazionale* si misura in *rad/s*

La frequenza ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, $1/\left[T\right]$.

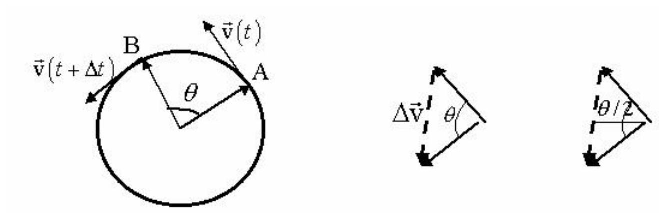
Nel *Sistema Internazionale* la frequenza si misura in *Hertz* (Hz) ed indica il *numero di giri al secondo*.

1.10.2 Accelerazione centripeta

Consideriamo un punto materiale che si muove di *moto circolare uniforme* su di una circonferenza di raggio r. Consideriamo il vettore

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}\,(t + \Delta t) - \mathbf{v}\,(t) \tag{50}$$

in diversi tratti della traiettoria. Proviamo a calcolare il suo modulo. I vettori $\mathbf{v}\,(t)$ e $\mathbf{v}\,(t + \Delta t)$ sono di pari intensità. Insieme al vettore $\Delta\mathbf{v}$ formano un triangolo isoscele di cui $\Delta\mathbf{v}$ è la base. Inoltre, tale triangolo è simile al triangolo formato dai vettori posizione e dal vettore spostamento.



In particolare, gli angoli opposti ai vettori $\Delta\mathbf{r}$ e $\Delta\mathbf{v}$, sono uguali. Abbiamo indicato tale angolo con θ. Riferendoci al triangolo delle velocità, potremo scrivere

$$\Delta \mathrm{v} = 2\mathrm{v}\sin(\theta/2) \tag{51}$$

e, riferendoci al triangolo dei vettori posizione e spostamento, potremo esprimere l'angolo in radianti

$$\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

Sostituendo l'espressione dell'angolo nella (51), avremo:

$$\Delta \mathrm{v} = 2\mathrm{v}\sin\left(\frac{\Delta s}{2r}\right)$$

Per *piccoli angoli*, cioè per *intevalli temporali piccoli*, il seno di un angolo si confonde con l'angolo stesso: $\sin x \simeq x$; allora, si potrà scrivere

$$\Delta \mathrm{v} \simeq 2\mathrm{v}\left(\frac{\Delta s}{2r}\right) \simeq \frac{\mathrm{v}}{r}\Delta s \tag{52}$$

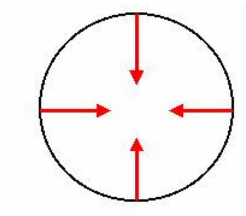
Dividendo per l'intervallo temporale, avremo

$$\frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} \simeq \frac{\mathrm{v}}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

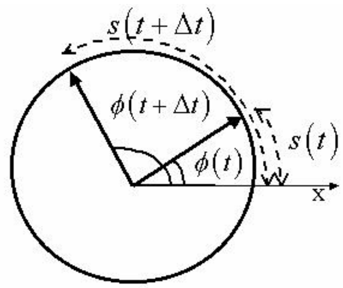
Al primo membro, per intervalli temporali sempre più piccoli, vale a dire nel limite per $\Delta t \to 0$, ci sarà un'accelerazione, che indicheremo con a_c, detta *accelerazione centripeta*, mentre al secondo membro apparirà, a fattore, una seconda velocità. In definitiva, si avrà:

$$a_c = \frac{\mathrm{v}^2}{r} \tag{53}$$

L'accelerazione centripeta è diretta sempre verso il centro della circonferenza:



1.10.3 Quantità lineari e angolari



Abbiamo visto che un angolo piano si può scrivere

$$\phi(t) = \frac{s(t)}{R} \tag{54}$$

dove $s(t)$ è l'arco di circonferenza misurato a partire da una data posizione. Possiamo senz'altro scrivere

$$R\frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

ovvero, nel limite per $\Delta t \to 0$,

$$R\omega = \mathrm{v} \tag{55}$$

dove v è la velocità che, ricordiamo, è tangente alla circonferenza. Se il moto *non è uniforme*, dalla precedente relazione, possiamo anche scrivere:

$$R\frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}(t+\Delta t) - \mathrm{v}(t)}{\Delta t}$$

e, nel limite per $\Delta t \to 0$, si ottiene

$$R\alpha = a_t \tag{56}$$

dove abbiamo introdotto l'*accelerazione tangenziale*:

$$a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{v}\,(t + \Delta t) - \mathrm{v}\,(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{57}$$

e l'*accelerazione angolare* α

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega\,(t + \Delta t) - \omega\,(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{58}$$

L'accelerazione tangenziale ha la direzione della tangente alla circonferenza ed è presente solo nel caso in cui il moto circolare è *non* uniforme. L'accelerazione centripeta ha la direzione radiale ed è sempre presente nel moto circolare. In generale, possiamo dire (vedi il secondo capitolo per un approfondimento) che, nel moto circolare, l'accelerazione è sempre la somma di un'accelerazione radiale e di una tangenziale:

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_c \mathbf{u}_r \tag{59}$$

1.11 Moto su traiettoria arbitraria nota

Prima di studiare come si determina la traiettoria di un punto materiale in moto, vogliamo stabilire alcune caratteristiche del moto dei corpi. Per fare ciò, assumeremo di conoscere la traiettoria e porremo la nostra attenzione sul modo in cui il corpo percorre la traiettoria stessa. Si parla, in tal caso, di studiare l'aspetto intrinseco del moto. Esamineremo, in funzione del tempo, come varia un parametro che sia adatto a fissare la posizione del punto materiale sulla sua traiettoria.

Immaginiamo due auto che entrano in un'autostrada. Al casello i due autisti azzerano i contachilometri e un proprio orologio. Poi, man mano che essi procedono viene segnato, da ciascuno, su di un foglio il tempo trascorso ed i chilometri percorsi.

Supponiamo che il primo autista abbia la seguente tabella:

$t(h)$	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$s(km)$	0	50	100	150	200	250

che può anche trasformarsi in un grafico. Si dice che abbiamo costruito un *diagramma orario* del moto di una delle auto lungo l'autostrada.

Si può anche vedere a quale curva i punti appartengono. Si troverà una retta:

$$s(t) = 100t$$

L'altro autista invece presenta i seguenti dati:

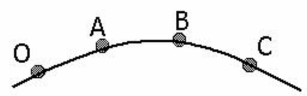
$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$s(m)$	0	1	4	9	16	25	36

che si potranno anch'essi graficare. La seconda auto si è mossa più rapidamente ma ha fatto pochi metri. Il grafico può essere trasformato in una curva analitica la cui espressione è

$$s(t) = t^2$$

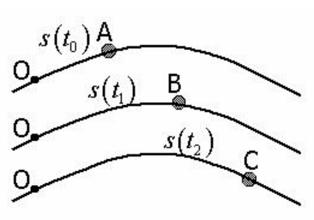
Le due automobili hanno percorso la stessa traiettoria (l'autostrada) ma con modalità differenti.

Questi due esempi ci permettono di passare ad una trattazione di tipo generale che possa consentirci di trattare un qualunque moto su traiettoria prestabilita. Supponiamo che un punto materiale si muova su di una traiettoria prestabilita dello spazio.



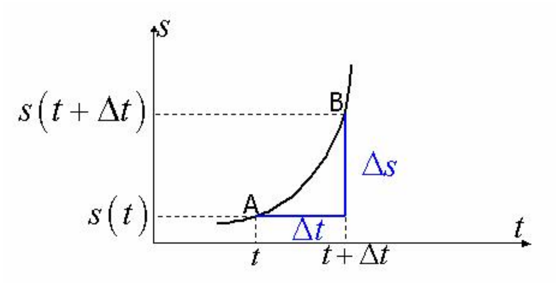
Scelto su tale traiettoria, in maniera arbitraria, un punto O (detto *origine*) possiamo misurare le lunghezze percorse, lungo la traiettoria, dal punto materiale rispetto all'origine fissata. Possiamo pensare che il corpo sia partito dal punto O e, nel corso del tempo, sia passato da A, poi da B e poi ancora da C. In questo modo, abbiamo anche definito un verso positivo di percorrenza lungo la traiettoria.

Indicheremo con s(t) la lunghezza, variabile nel tempo, del percorso lungo la traiettoria del punto materiale e la chiameremo *ascissa curvilinea* del punto materiale rispetto ad O.



Nei moti su traiettoria prestabilita la conoscenza del moto del punto materiale si riduce alla conoscenza della variazione dell'ascissa curvilinea s nel corso del tempo.

La curva che rappresenta l'ascissa curvilinea in funzione del tempo è detta *diagramma orario* e la relazione $s = s(t)$ è detta *legge oraria*.



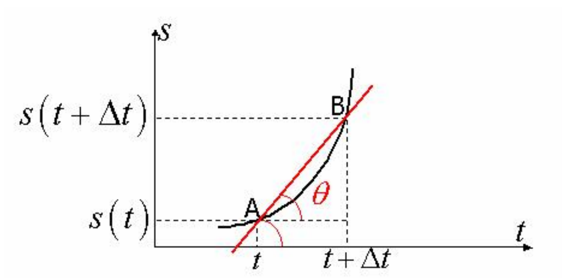
Il rapporto

$$\mathrm{v}_m = \frac{s\,(t+\Delta t) - s\,(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{60}$$

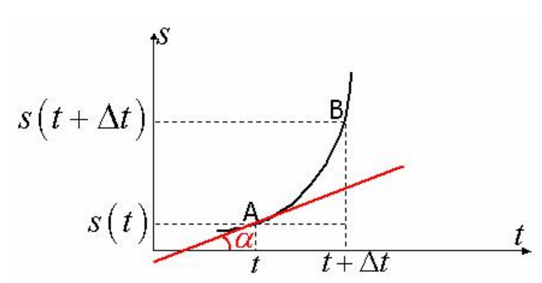
definisce la *velocità media scalare* durante l'intervallo di tempo Δt.

Calcolare il rapporto $\Delta s/\Delta t$ equivale a calcolare la tangente dell'angolo che la retta AB forma con l'asse dei tempi, cioè, la *pendenza della retta* che passa per A e B:

$$\mathrm{v}_m = \tan\theta \tag{61}$$



Inoltre, il rapporto $\Delta s/\Delta t$ rappresenta il valore della velocità ipotetica (e costante) con la quale il punto materiale potrebbe andare da A a B durante l'intervallo temporale Δt. Man mano che il valore del tempo Δt si riduce, l'ascissa curvilinea cambia e con essa la velocità scalare media. Esiste, tuttavia, un valore Δt^*, abbastanza prossimo al valore zero, tale che, per ogni altro valore $\Delta t < \Delta t^*$, la velocità scalare media non cambia più.



Quando ciò accade si dice che si è trovata la *velocità istantanea*, del punto materiale in A. Essa sarà detta semplicemente *velocità* e sarà indicata con v. La velocità in A, essendo un particolare rapporto $\Delta s/\Delta t$, rappresenta la tangente dell'angolo α: $\mathrm{v} = \tan\alpha$. α è l'angolo che *la retta tangente alla curva oraria, nel punto considerato, forma con l'asse dei tempi.* Noi scriveremo

$$\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{62}$$

L'operazione di limite, sopra descritta ed indicata ds/dt è detta *derivata temporale* della funzione $s(t)$.

Note le velocità, potremmo fare dei grafici delle velocità in funzione del tempo e, con un procedimento già descritto altre volte, considerare l'accelerazione all'istante t:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{63}$$

ovvero

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{64}$$

Le considerazioni svolte per l'ascissa curvilinea, nella sua forma generale, come abbiamo già detto in precedenza, valgono per le funzioni,

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{65}$$

che rappresentano le componenti cartesiane del vettore posizione. Avremo, per le componenti della velocità

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} \qquad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} \qquad \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt} \tag{66}$$

e per le componenti dell'accelerazione

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{67}$$

Per ciascuna componente valgono le proprietà appena discusse.

1.12 I sistemi di unità di misura

In questo capitolo abbiamo imparato che ogni *grandezza fisica* si misura in termini di una opportuna unità di misura. Ogni grandezza fisica è tale perché si è riuscito a stabilire un insieme di operazioni di laboratorio che hanno consentito di associargli un valore numerico. Il valore numerico dipende dal sistema di unità di misura adottato. Rispetto a queste, tra le grandezze fisiche incontrate possiamo distinguere due categorie. Da un lato, le lunghezze ed il tempo e dall'altro, la velocità e l'accelerazione. La diversità tra le due categorie consiste nel fatto che le seconde si misurano in termini delle prime due. In altre parole, le lunghezze e il tempo costituiscono delle *unità di base* (sono tra loro indipendenti e le altre si possono misurare in termini di esse). Si comprende allora come si possa tentare di stabilire il numero minimo di grandezze fisiche, le cui unità di misura siano tra loro indipendenti e tali che tutte le altre unità possano esprimersi in termini di questo gruppo di unità di misura. Un tale gruppo costituisce un *Sistema di Unità di Misura.*

Dal 1960 è in uso il Sistema Internazionale (S.I.). Tale sistema di unità si fonda su 7 unità fondamentali: il tempo (il *secondo*:s), le lunghezze (il *metro*: m), la massa (*chilogrammo*: kg), la temperatura assoluta (*kelvin*: K), la quantità di materia (*mole*: mol), l'intensità di corrente (*ampere*: A) e l'intensità luminosa (*candela*: cd). Si veda l'appendice alla fine del libro per la definizione di queste 7 quantità, per i fattori di conversione a queste unità ed il valore delle costanti usate nel testo.

Nel 1975 la Conferenza Generale di Pesi e Misure ha adottato un'unità di lunghezza (sempre il metro) basata sulla costanza della velocità della luce nel vuoto in assenza di un campo gravitazionale. La seguente unità di lunghezza è ora accettata:

Un metro è la distanza percorsa da un'onda elettromagnetica nel vuoto in un tempo pari a $1/c$ *di un secondo.*

Con c si intende il valore della velocità della luce nel vuoto: essa è uguale a $299,79 \cdot 10^6 m/s$ (con s abbiamo indicato l'unità di misura del tempo). Come si può vedere, la definizione dell'unità di lunghezza è diventata una definizione derivabile dall'unità di tempo e dal valore di una costante fondamentale, che è la velocità della luce nel vuoto. In realtà, quello che è sempre accaduto alle unità di base, o meglio alla determinazione dell'unità campione, è una continua evoluzione e la tendenza odierna prevede la loro determinazione attraverso costanti fondamentali che poi, a loro volta, si determinano con grande accuratezza.

Data l'importanza del valore dell'unità di tempo, cioè il secondo, daremo anche la sua attuale definizione anche, se la sua comprensione non è possibile a questo livello:

Il secondo è la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale del Cesio 133.

Poiché anche il minuto (min), l'ora (h), il giorno (d) e l'anno ($anno$) sono usati per descrivere comunemente gli intervalli temporali, diamo qui di seguito le loro espressioni in termini di secondi:

$$1\min = 60s \qquad 1h = 3600s \qquad 1d = 8,6 \times 10^4 s \qquad 1anno = 3,156 \times 10^7 s$$

1.13 Esempi: derivate temporali e grandezze fisiche

Abbiamo imparato che se si ha una legge oraria la derivata temporale ci fornisce la velocità ad ogni istante di tempo. Uno degli esempi di legge oraria che abbiamo fornito è stata

$$s\left(t\right)=t^2 \tag{E.1}$$

Vogliamo imparare ad operare con le derivate. La funzione t^2 appartiene alla categoria delle funzioni dette "*potenze della variabile indipendente*"

$$f\left(t\right)=t^n \tag{E.2}$$

La derivata di una funzione di questo tipo è

$$\frac{d}{dt}\left(t^n\right)=nt^{n-1} \tag{E.3}$$

Applicata alla (E.1) ci darà:

$$\frac{d}{dt}\left(t^2\right)=2t \tag{E.4}$$

Allora, possiamo dire che la curva delle velocità (cioè dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla legge oraria) è

$$\mathrm{v}\left(t\right)=2t \tag{E.5}$$

Se volessi sapere il valore della velocità che il corpo aveva, rispettivamente, dopo 1 secondo, 5 secondi o 10 secondi dalla sua partenza, scriverò:

$$\mathrm{v}\left(t=1\right)=2m/s \qquad \mathrm{v}\left(t=5\right)=10m/s \qquad \mathrm{v}\left(t=10\right)=20m/s$$

Queste semplici operazioni ci hanno evitato di tracciare il diagramma orario, di tracciare le rette tangenti nei punti $t=1,5$ e 10 secondi, di valutare l'angolo che le rette tangenti formano con l'asse dei tempi e calcolare il valore della tangente dei vari angoli. Se si facesse una tale laboriosa operazione si troverebbero esattamente i valori delle velocità appena calcolati.

Vista la potenza del calcolo appena mostrato andremo avanti con la sua conoscenza. Supponiamo di avere la seguente legge oraria:

$$s\left(t\right)=3t^2$$

Questa funzione appartiene alla categoria delle funzioni del tipo:

$$f\left(t\right)=kt^n \tag{E.6}$$

dove k è una costante. La derivata di una tale funzione è:

$$\frac{d}{dt}\left(kt^n\right)=k\frac{d}{dt}\left(t^n\right)=knt^{n-1} \tag{E.7}$$

Allora

$$\frac{d}{dt}\left(3t^2\right)=3\frac{d}{dt}\left(t^2\right)=3\times 2t$$

ovvero

$$\mathrm{v}\left(t\right)=6t \quad m/s$$

La derivata di una *costante* è *zero*:

$$\frac{d}{dt}(k) = 0 \tag{E.8}$$

Veniamo alla derivata della somma di due funzioni:

$$\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{d}{dt}f(t) + \frac{d}{dt}g(t) \tag{E.9}$$

Consideriamo la funzione

$$s(t) = 4t^3 + 3t^2 - 3t$$

Avremo

$$\frac{d}{dt}\left(4t^3 + 3t^2 - 3t\right) = 12t^2 + 6t - 3$$

ovvero

$$\mathrm{v}(t) = 12t^2 + 6t - 3 \quad m/s$$

Analizziamo le *funzioni trigonometriche*:

$$s(t) = \sin t \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}s(t) = \cos t \tag{E.10}$$

$$s(t) = \cos t \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}s(t) = -\sin t \tag{E.11}$$

Supponiamo di avere la seguente funzione:

$$s(t) = \sin(kt)$$

Questa è una *funzione di funzione* $F(g(t))$. La sua derivata è

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = \frac{dF}{dg}\frac{dg}{dt} \tag{E.12}$$

Allora

$$\mathrm{v}(t) = \frac{d}{dt}\sin(kt) = \cos(kt)\,k$$

Per finire consideriamo la seguente funzione:

$$s(t) = t^2 \sin t \tag{E.13}$$

Questa, in particolare, è il prodotto di due funzioni. La derivazione del prodotto di due funzioni è

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,g(t)] = g(t)\frac{d}{dt}[f(t)] + f(t)\frac{d}{dt}[g(t)] \tag{E.14}$$

Allora la derivata della funzione (E.13) è

$$\mathrm{v}(t) = 2t\sin t + t^2\cos t \quad m/s$$

L'accelerazione, essendo la derivata temporale della velocità, è anche la derivata seconda dell'ascissa curvilinea rispetto al tempo. In precedenza abbiamo visto:

$$s(t) = 3t^2 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{v}(t) = 6t$$

Possiamo scrivere

$$a = \frac{d}{dt}\mathrm{v}(t) = 6 > 0$$

Se avessimo avuto la funzione

$$s(t) = -3t^2$$

avremmo trovato

$$a = \frac{d}{dt}\mathrm{v}(t) = -6 < 0$$

Se avessimo avuto la funzione

$$s(t) = 3t$$

avremmo trovato

$$a = 0$$

Possiamo concludere dicendo che l'accelerazione, può essere *positiva, negativa o nulla.*

1.14 Complementi: il problema fondamentale del moto

Supponiamo che il punto materiale, di cui ci accingiamo a descrivere il moto, si muova in linea retta (si pensi alla caduta di un grave). Assumeremo che il moto di tale punto avvenga in *modo continuo*, ovvero che se il punto passa, ad un dato istante di tempo, per una posizione A, esiste un intervallo di tempo, abbastanza piccolo, che include l'istante considerato, e durante il quale (intervallo!) il punto occupa posizioni vicine ad A, tanto quanto si vuole. In altri termini, possiamo dire che il punto sta descrivendo una *linea continua*, che sarà la sua *traiettoria* (linea retta per nostra scelta semplificatrice). Supponiamo che durante un certo intervallo di tempo, il punto si sia spostato dalla posizione A alla B. Fissiamo, in modo arbitrario, un punto O (detto *origine degli spazi*) tra A e B e stabiliamo che siano positive le distanze, del punto mobile, da O verso B (diremo OB *verso positivo della traiettoria*). Il verso opposto, quello che va da O ad A sarà detto *verso negativo* della traiettoria.

Il nostro scopo è la determinazione della posizione del punto sulla retta ad ogni istante di tempo. Se indichiamo con x la distanza del punto dall'origine degli spazi, per la precedente assunzione, possiamo affermare che

$$x = f(t) \tag{C1}$$

dove f(t) è una funzione continua che cercheremo di determinare.

Come possiamo determinare la funzione f(t)? Sia P il punto della retta occupato dal punto materiale al tempo t e sia P' quello occupato al tempo t'. Indicheremo x ed x' i valori delle distanze dei due punti dall'origine O. Possiamo formare il seguente rapporto, detto *rapporto incrementale:*

$$\frac{PP'}{t'-t} = \frac{x'-x}{t'-t}$$

che possiamo, in base alla (C1), anche scrivere

$$\frac{PP'}{t'-t} = \frac{f(t') - f(t)}{t'-t} \tag{C2}$$

Se $t' > t$ lo diremo rapporto incrementale *destro*, e se $t' < t$ lo diremo *sinistro*. Se si fa tendere t' a t, ambedue i rapporti tenderanno ad un limite che si chiamano, rispettivamente, *derivata sinistra e destra*. Nel caso in cui i due limiti siano uguali, chiameremo il limite comune, *velocità*:

$$\mathrm{v} \equiv \lim_{t' \to t} \frac{f(t') - f(t)}{t'-t} = \frac{dx}{dt} \tag{C3}$$

Sappiamo che il segno della derivata indica se la funzione è crescente o decrescente, quindi possiamo dire che se la velocità è positiva il moto avviene nel verso positivo della traiettoria, in senso contrario se negativa.

A cosa serve il concetto di velocità nella risoluzione del problema del moto? La risposta è la seguente: Se conosciamo la velocità del punto materiale in ogni punto della traiettoria, possiamo scrivere la traiettoria in funzione di essa. Sia

$$\mathrm{v} = g(t) \tag{C4}$$

la funzione che ad ogni istante ci dà il valore della velocità del punto materiale. Introducendo il concetto di integrale (vedi Appendice), possiamo scrivere

$$x = f(t) = \int dt g(t) + costante \tag{C5}$$

Allora, a meno di una costante, la conoscenza della velocità ci consente, mediante l'operazione di integrazione, di conoscere la traiettoria. L'indeterminazione, dovuta alla costante, viene eliminata se si conosce la posizione del punto mobile ad un certo istante. Infatti se

$$x_0 = f(t_0) \tag{C6}$$

allora

$$x = f(t) = \int_{t_0}^{t} dt' g(t') \tag{C7}$$

Possiamo dire che, *la conoscenza della velocità ad ogni istante di tempo, unita alla conoscenza della posizione ad un certo istante, consente di determinare completamente il moto del punto mobile.*

Sfortunatamente, come capiremo meglio in seguito, i responsabili del moto (cioè le forze) non sono legati alle velocità, bensì alle variazioni di velocità. Dobbiamo allora procedere ad una ulteriore definizione. Se è nota la funzione velocità, $\mathrm{v} = g(t)$, possiamo formare il seguente rapporto incrementale

$$\frac{g(t') - g(t)}{t' - t}$$

e nel limite per $t' \to t$, quando il limite sinistro e destro coincidono, possiamo definire, mediante il limite comune, l'*accelerazione*

$$a \equiv \lim_{t' \to t} \frac{g(t') - g(t)}{t' - t} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{C8}$$

In analogia con la precedente operazione fatta per la velocità, possiamo esprimere la funzione velocità in termini dell'accelerazione. Infatti, se conosciamo la funzione accelerazione

$$a = \xi(t) \tag{C9}$$

possiamo scrivere

$$\mathrm{v} = \int dt \xi(t) + costante \tag{C10}$$

Ancora una volta, l'indeterminazione sulla costante può essere eliminata se conosciamo il valore della velocità ad un certo istante. Infatti se

$$\mathrm{v}_0 = \xi(t_0) \tag{C11}$$

possiamo scrivere

$$\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t} dt' \xi(t') + \mathrm{v}_0 \tag{C12}$$

In conclusione, *se conosciamo l'accelerazione del punto materiale in moto, ad ogni istante di tempo, e la posizione e la velocità ad un determinato istante, possiamo determinare completamente il moto del punto.*

1.15 Problemi

1. Dati due vettori **a** e **b** di componenti cartesiane (1,-2,5) e (2,2,4), si determini il vettore somma ed il vettore differenza.

2. Dati due vettori **a** e **b** di componenti (2,3,-4) e (-1,2,5), si determini il modulo di entrambi, nonché il loro prodotto scalare e vettoriale.

3. Siano dati i vettori **a**, **b** e **c**, tali che $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Mostrare che $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle \mathbf{ab}) = c^2$ (Legge del coseno).

4. Dimostrare che l'area del parallelogrammo avente per lati i vettori **a** e **b** è absen($\angle$**ab**).

5. Sia dato un triangolo i cui lati siano i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ tali che $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$. Mostrare che $\sin(\angle \mathbf{ab})/c = \sin(\angle \mathbf{ac})/b$ (Legge dei seni).

6. Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio $R = 0,12m$ con un periodo $T = 6s$. Si determini la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta del punto. (Risp.: v_1 = 12,6 $\times 10^{-2}$ m/s; a_c = 13,16$\times$ $10^{-2} m/s^2$)

7. L'accelerazione di un punto materiale in moto rettilineo è

$$a = Bt$$

dove $B = 1,2m/s^3$. Sapendo che la velocità all'istante iniziale è $\mathrm{v}_0 = 0,2m/s$ e che lo spazio percorso allo stesso tempo è $x_0 = 0,8m$, si determini la velocità e lo spazio percorso all'istante $t_1 = 2s$. (Risp.: $\mathrm{v} = 2m/s, x = 2,8m$)

8. Due punti materiali partono allo stesso istante, dalla stessa posizione, muovendosi sulla stessa circonferenza, nello stesso verso. Sapendo che le due particelle hanno, rispettivamente, velocità angolari $\omega_1 = 7rad/s$ ed $\omega_2 = 8rad/s$, determinare dopo quanto tempo le due particelle si rincontrano. (Risp.: $t = 6,28s$)

9. Due punti materiali vengono lasciati cadere dalla stessa altezza, uno dopo l'altro, con un intervallo di tempo $\Delta t = 1s$. Si determini, considerando come tempo iniziale quello in cui viene lasciato cadere il primo corpo, l'intervallo di tempo al momento in cui la distanza tra i due punti è di 9,8m. (Risp.: $t = 1,5s$)

10. Un punto materiale parte dall′origine degli assi cartesiani e lungo l'asse x con una accelerazione a=2m/s^2. Lungo lo stesso asse si sta muovendo un secondo punto materiale con velocità costante $\mathrm{v} = 10m/s$. Si determini dopo quanto tempo, a quale distanza dall'origine e con quale velocità il primo punto raggiunge il secondo. (Risp.: $t = 10s, x = 10^2m, \mathrm{v} = 20m/s$)