

SISTEMI DI MISURA ED ANALISI DIMENSIONALE

a cura del prof. F. Malara

1. Il metodo sperimentale e le grandezze fisiche

La Fisica è una scienza fondata sul metodo sperimentale: ogni nuova acquisizione passa attraverso una serie di osservazioni di fenomeni naturali ed esperimenti, i quali portano, per via induttiva, alla formulazione di ipotesi sui meccanismi fisici che regolano i fenomeni stessi. Tali ipotesi vengono messe alla prova con successivi esperimenti, allargando e chiarendo sempre più la descrizione dei fenomeni osservati, fino alla formulazione di una teoria che fornisca, nella maniera più semplice e completa possibile, una spiegazione di tutto ciò che è stato osservato.

Pertanto, la validità di ogni teoria fisica riposa esclusivamente sulla sua capacità di descrivere e spiegare in maniera coerente ciò che si osserva in natura. Nell'ambito della Fisica nessun risultato può essere considerato valido in maniera definitiva; al contrario, qualunque teoria attualmente giudicata corretta potrà in futuro essere smentita da nuovi fatti sperimentali, che porteranno a nuove formulazioni teoriche più ampie e generali delle precedenti.

In questo senso, la base delle scienze fisiche è rappresentata dalle osservazioni e dagli esperimenti, piuttosto che dalle speculazioni teoriche.

Occorre tenere conto di un altro aspetto importante: ciò che caratterizza in particolare la Fisica rispetto ad altre scienze sperimentali, è il carattere quantitativo delle osservazioni fatte.

Ad esempio, se osserviamo il moto di caduta di un corpo, e vogliamo darne una descrizione in termini fisici non basta dire che il corpo cade con rapidità crescente, ma occorre dire precisamente in che modo la sua velocità aumenta nel corso del tempo. Analogamente, in un esperimento di propagazione del calore, non basterà dire che un dato corpo diventa man mano più o meno caldo a contatto con un altro, ma occorrerà dare la dipendenza della sua temperatura dal tempo, e così via.

E' chiaro però che una descrizione in termini quantitativi di un dato fenomeno, cioè per mezzo di quantità espresse da numeri e non semplicemente in termini di qualità, presuppone che in Fisica ogni osservazione debba essere, in realtà, una misura quantitativa.

Tale misura deve essere la più oggettiva possibile, ossia, svincolata, per quanto possibile, dalle sensazioni soggettive di colui il quale compie l'osservazione. Per questo motivo, nella grandissima maggioranza dei casi, per effettuare una misura ci si avvale di opportuni strumenti di misura e di procedure standardizzate che permettano di ottenere un risultato il più oggettivo possibile.

Quanto più il risultato di una misura è oggettivo, tanto più esso sarà indipendente dalle caratteristiche e dalle condizioni momentanee di chi osserva: cioè, ripetendo lo stesso esperimento nelle stesse condizioni, si devono ottenere gli stessi risultati, entro un certo margine di errore legato alla precisione degli strumenti di misura.

Inoltre, ciò implica che tutte le quantità coinvolte in una descrizione fisica di un fenomeno devono essere necessariamente delle quantità misurabili, ossia delle quantità delle quali sia possibile dare un valore numerico, in seguito ad un'operazione di misura. In altre parole, quando in Fisica si introduce una nuova quantità, bisogna anche spiegare come misurarla.

Ad esempio, se parliamo di velocità o di temperatura, implicitamente dobbiamo aver chiaro come misuriamo tali quantità. Al contrario, tutto ciò che potrebbe apparire chiaro ed intuitivo, ma non è oggettivamente misurabile, come il concetto di bellezza o di bontà, non è una quantità fisica.

Le quantità misurabili delle quali tratta la Fisica vengono dette grandezze fisiche.

2. Grandezze fondamentali e grandezze derivate

La descrizione teorica di un fenomeno fisico viene sempre espressa tramite delle relazioni che legano le varie grandezze fisiche che sono coinvolte nel fenomeno stesso. Poiché ogni grandezza fisica ha un valore numerico, allora le relazioni che le legano saranno necessariamente delle relazioni di carattere matematico, ossia delle equazioni.

In questo caso, il termine equazione va inteso in un senso piuttosto ampio: potranno essere delle semplici equazioni algebriche, oppure delle disuguaglianze, o ancora delle equazioni differenziali o integrali (cioè che coinvolgono le operazioni di derivata o integrale), ecc. In certi casi, delle relazioni matematiche vengono usate per dare la definizione di una data grandezza in funzione di altre; ad esempio, la relazione

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

definisce l'energia cinetica T di un corpo in funzione della sua massa m e della sua velocità v . In altri casi, le relazioni matematiche fra grandezze sono usate per rappresentare una legge fisica ricavata nell'ambito di una teoria. Ad esempio, se il fenomeno è il movimento di un corpo soggetto al proprio peso, le osservazioni mostrano che l'energia cinetica T e l'energia potenziale gravitazionale U del corpo sono legate dalla semplice relazione

$$T + U = \text{costante}$$

per lo meno nei casi in cui l'attrito è trascurabile. In questo caso, la relazione matematica considerata esprime il fatto che l'energia meccanica di un corpo, data dalla somma $T + U$, in certe condizioni si mantiene costante nel tempo.

Il fatto che le grandezze fisiche siano legate fra loro tramite delle relazioni matematiche implica che esse non sono indipendenti fra loro. In effetti, ognuna della grandezza fisiche viene normalmente espressa come una combinazione di un insieme di grandezze “di base”. Tali grandezze vengono dette **grandezze fondamentali**, e rappresentano il numero minimo di grandezze combinando le quali, tramite relazioni matematiche, è possibile ottenere tutte le altre.

Tutte le grandezze che non sono fondamentali sono dette **grandezze derivate**. In un certo senso, le grandezze fondamentali possono essere considerate come un insieme di pochi “ingredienti” base (ad esempio, farina, zucchero, acqua, lievito) combinando i quali si ottengono una grande quantità di piatti (pane, tagliatelle, pizza, spaghetti, torta, ecc.) che rappresentano le grandezze derivate.

Quali e quante sono le grandezze fisiche fondamentali? La risposta dipende da qual è l’ambito dei fenomeni fisici che si vuole studiare. Nel corso del primo anno degli studi di Ingegneria ci occuperemo di due parti della Fisica, ossia, la Meccanica e l’Elettromagnetismo. Se ci limitiamo a questi due ambiti, tutte le grandezze fisiche coinvolte si possono esprimere in funzione di **quattro grandezze fondamentali**, di cui tre sono necessarie per la Meccanica, mentre la quarta viene introdotta per studiare i fenomeni elettromagnetici.

In Meccanica, le tre grandezze fisiche fondamentali sono:

- 1) **la lunghezza**
- 2) **il tempo**
- 3) **la massa**

Le prime due (lunghezza e tempo) servono a definire due “ingredienti” necessari per poter descrivere i fenomeni di movimento, cioè lo spazio e il tempo. La terza (massa) è una proprietà dei corpi che contribuisce a determinarne il movimento. Quando si passa dalla Meccanica all’Elettromagnetismo è necessario aggiungere la quarta grandezza fondamentale:

- 4) **l’intensità di corrente elettrica**

che è legata alla carica elettrica; quest’ultima rappresenta un’altra proprietà della materia, indipendente dalla massa. Pertanto, tutte le altre grandezze fisiche, ossia quelle derivate (velocità, accelerazione, energia, momento angolare, carica elettrica, campo magnetico, ecc.), si esprimono come combinazione di lunghezza, tempo, massa e corrente elettrica.

Esistono poi altre grandezze fondamentali utilizzate in altre branche della Fisica, sulle quali non ci soffermiamo in quanto tali branche non saranno oggetto di studio nel corso del primo anno della laurea in Ingegneria.

Osserviamo che la scelta di quali siano le grandezze fondamentali e quali quelle derivate è frutto di una mera convenzione. Ad esempio, la velocità v è considerata

una grandezza derivata, ottenuta (nei casi più semplici) come rapporto tra le grandezze fondamentali lunghezza e tempo:

$$v = \frac{l}{t}$$

Il linea di principio, niente impedirebbe, viceversa, di considerare v come grandezza fondamentale e la lunghezza l come grandezza derivata, esprimendo quest'ultima tramite la formula inversa

$$l = vt$$

D'altra parte, è stato necessario operare la scelta di decidere quali tra le varie grandezze fisiche vengono considerate fondamentali. Il criterio che ha guidato tale scelta è quello che le grandezze fondamentali sono quelle che vengono misurate più facilmente e più direttamente: normalmente è più semplice misurare una lunghezza piuttosto che non la velocità di un corpo, ed è per questo motivo che la lunghezza e non la velocità viene presa come grandezza fondamentale.

Nella tabella seguente facciamo un elenco di alcune grandezze derivate, usate in Meccanica ed in Elettromagnetismo, espresse in funzione delle 4 grandezze fondamentali: lunghezza (L), tempo (T), massa (M) ed intensità di corrente elettrica (I). A questa combinazione si dà il nome di “dimensione” della grandezza stessa.

TABELLA 1

Grandezza derivata	dimensione
velocità	$L T^{-1}$
accelerazione	$L T^{-2}$
forza	$M L T^{-2}$
quantità di moto	$M L T^{-1}$
energia, lavoro	$M L^2 T^{-2}$
momento meccanico	$M L^2 T^{-2}$
momento angolare	$M L^2 T^{-1}$
densità volumetrica di massa	$M L^{-3}$
carica elettrica	$T I$
densità volumetrica di carica	$L^{-3} T I$
densità superficiale di carica	$L^{-2} T I$
campo elettrico	$L T^{-3} M I^{-1}$
potenziale elettrostatico	$L^2 T^{-3} M I^{-1}$
capacità elettrica	$L^{-2} M^{-1} T^4 I^2$
resistenza elettrica	$L^2 T^{-3} M I^{-2}$
campo magnetico	$T^{-2} M I^{-1}$

coefficiente di induzione elettromagnetica	$L^2 T^{-2} M I^{-2}$
--	-----------------------

3. Sistemi di misura

Come si è detto, ogni grandezza fisica, fondamentale o derivata che sia, è una quantità misurabile. Si è detto anche che l'operazione di misura corrisponde a confrontare il valore di una data grandezza con un valore "campione". Il risultato numerico di una misura corrisponde a esprimere il rapporto tra la quantità misurata e il campione.

Ad esempio, se misurando la durata T di un certo fenomeno troviamo il valore 10,5 secondi, ciò significa che il fenomeno considerato è durato 10 volte e mezza più a lungo della una durata "campione" di 1 secondo.

Dunque, per ogni quantità misurabile è necessario definire un corrispondente campione. Tale campione viene detto **unità di misura**. In altre parole, ogni grandezza fisica ha la sua unità di misura.

D'altra parte, come le grandezze derivate sono combinazioni di quelle fondamentali, così le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono facendo le stesse combinazioni delle unità di misura delle grandezze fondamentali.

Ad esempio, se misuriamo le lunghezze in miglia nautiche ed i tempi in ore, l'unità di misura della velocità sarà "miglia/ora" (questa unità di misura si usa nella navigazione e corrisponde ai cosiddetti "nodi").

La scelta di un'unità di misura piuttosto che di un'altra è arbitraria, e spesso è dettata da questioni di ordine pratico: ad esempio, se vogliamo misurare la lunghezza della pista di uno stadio potremmo utilizzare il metro; se invece ci interessa misurare la distanza tra due stelle, il metro è un'unità troppo piccola, mentre è più pratico utilizzare come unità di misura, ad esempio, l'anno-luce (la distanza percorsa dalla luce in un anno).

In effetti, esiste una grande varietà di unità di misura, usate in differenti contesti (nella vita quotidiana, in varie discipline tecnico-scientifiche, ecc.) e che possono anche cambiare da luogo a luogo (ad esempio, nei paesi anglosassoni si usano ancora unità di lunghezza come il "pollice", il "piede", il "miglio", che non vengono usate in Italia).

Nell'ambito della Fisica è nata perciò l'esigenza di "mettere ordine" e razionalizzare le unità di misura usate. Sono nati così i cosiddetti **sistemi di misura**. Un sistema di misura è un insieme razionale di unità di misura: ossia, in ogni sistema di misura vengono scelte le unità di misura delle grandezze fondamentali, mentre quelle delle grandezze derivate rimangono definite di conseguenza.

Il sistema di misura più utilizzato in Fisica è il cosiddetto **Sistema Internazionale** (abbreviato con la sigla **SI**). Nell'ambito del SI:

- a) le lunghezze si misurano in metri (m)

- b) i tempi si misurano in secondi (s)
- c) le masse si misurano in chilogrammi (kg)
- d) le correnti elettriche si misurano in Ampère (A)

Da qui seguono le unità di misura delle grandezze derivate. Ad esempio, le velocità si misureranno in metri al secondo (m s^{-1}).

Spesso accade che l'unità di misura di una grandezza derivata venga abbreviata con un nome. Ad esempio, nel SI l'unità di misura della forza (kg m s^{-2}) viene denominata "Newton" (N). Nella tabella seguente riportiamo le unità di misura di alcune grandezze derivate, nel SI:

TABELLA 2

Grandezza derivata	unità di misura	abbreviazione
velocità	m s^{-1}	-
accelerazione	m s^{-2}	-
forza	kg m s^{-2}	Newton (N)
quantità di moto	kg m s^{-1}	-
energia, lavoro	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	Joule (J)
momento meccanico	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	N m
momento angolare	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$	-
densità volumetrica di massa	kg m^{-3}	-
carica elettrica	A s	Coulomb (C)
densità volumetrica di carica	$\text{m}^{-3} \text{A s}$	C m^{-3}
densità superficiale di carica	$\text{m}^{-2} \text{A s}$	C m^{-2}
campo elettrico	$\text{m s}^{-3} \text{kg A}^{-1}$	N C^{-1}
potenziale elettrostatico	$\text{m}^2 \text{s}^{-3} \text{kg A}^{-1}$	Volt (V)
capacità elettrica	$\text{m}^{-2} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$	Farad (F)
resistenza elettrica	$\text{m}^2 \text{s}^{-3} \text{kg A}^{-2}$	Ohm (Ω)
campo magnetico	$\text{s}^{-2} \text{kg A}^{-1}$	Tesla (T)
coefficiente di induzione elettromagnetica	$\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{kg A}^{-2}$	Henry (H)

Un altro sistema di misura molto usato è il sistema **CGS di Gauss**. Questo sistema di misura utilizza le seguenti unità per le grandezze fondamentali:

- a) le lunghezze si misurano in centimetri (cm)
- b) i tempi si misurano in secondi (s)
- c) le masse si misurano in grammi (g)
- d) le correnti elettriche si misurano in stampere.

Le unità delle grandezze derivate vengono di conseguenza.

4. Analisi dimensionale

L'analisi dimensionale è uno “strumento” teorico basato sul fatto che

- 1) ogni grandezza fisica ha una sua “dimensione”, cioè può essere espressa come una ben precisa combinazione delle grandezze fisiche fondamentali. Le dimensioni sono quelle elencate nella Tabella 1.
- 2) Le dimensioni delle varie grandezze fisiche che compaiono in una relazione matematica, cioè in una “formula”, devono rispettare alcune regole formali affinché la formula stessa abbia una propria coerenza.

Riguardo il punto 1) precisiamo che è possibile definire delle quantità “senza dimensioni” (**quantità adimensionali**): queste si possono ottenere come rapporto tra due quantità fisiche che hanno la stessa dimensione. Una quantità adimensionale non ha bisogno di unità di misura, e viene detta perciò **numero puro**.

Esempio

Il coefficiente di attrito dinamico μ_d per un corpo che striscia su una superficie scabra è dato dal rapporto tra la forza di attrito dinamico F_a subita dal corpo e la componente N della forza esercitata dal corpo sulla superficie, in direzione perpendicolare al corpo stesso:

$$\mu_d = \frac{F_a}{N}$$

Poiché il numeratore e il denominatore di questa frazione hanno le stesse dimensioni (sono entrambe delle forze), allora il coefficiente di attrito dinamico è una quantità adimensionale.

Quali sono le **regole formali dell'analisi dimensionale** (punto 2) ? Possiamo riassumerle così:

- a) le dimensioni di un prodotto tra grandezze fisiche si ottengono facendo il prodotto delle dimensioni dei singoli fattori. L'analogo vale anche per le dimensioni del rapporto;
- b) tutte le grandezze che compaiono in una somma o in una differenza devono avere le stesse dimensioni;
- c) il risultato di una somma o differenza di più grandezze ha le dimensioni di ognuna delle grandezze che sommiamo o sottraiamo;
- d) il primo membro di un'uguaglianza deve avere le stesse dimensioni del secondo membro;
- e) l'argomento di una funzione trascendente (es. sin, cos, log, exp) deve essere un numero puro;
- f) il risultato di una funzione trascendente è un numero puro.

A che cosa serve l'analisi dimensionale? Possiamo indicare alcune applicazioni importanti di essa, che si rivelano utili sia agli studenti di Fisica che ai ricercatori.

1.

Una prima applicazione dell'analisi dimensionale consiste nel "controllare" che una formula, oppure una serie di "passaggi" algebrici, siano "**dimensionalmente corretti**", cioè soddisfino le regole formali elencate sopra. Lo scopo è quello di **individuare possibili errori**.

Esempio

Supponiamo che uno studente, durante lo svolgimento di un problema di Fisica, dopo una serie di passaggi abbia ricavato la formula seguente:

$$Fd = \frac{1}{2}mv - \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Lo studente vuole ora controllare che la formula sia dimensionalmente corretta, quindi procede nel modo seguente. Le dimensioni dei singoli termini che compaiono nella formula (indicate in parentesi quadre) sono:

- F è una forza, quindi $[F] = [M L T^{-2}]$
- d ed Δx sono delle lunghezze, per cui $[d] = [\Delta x] = [L]$
- m è una massa, quindi $[m] = [M]$
- v è una velocità, quindi $[v] = [L T^{-1}]$
- k è una costante elastica, ossia una forza diviso una lunghezza, per cui le sue dimensioni sono $[k] = [M T^{-2}]$
- i fattori numerici 1/2 sono numeri puri, per cui non influenzano la dimensione dei termini che moltiplicano, Pertanto, la loro dimensione è indicata col simbolo [1]

Lo studente sostituisce nella formula le dimensioni dei vari termini:

$$[MLT^{-2}][L] = [1][M][LT^{-1}] + [1][MT^{-2}][L]^2$$

Effettuando le dovute semplificazioni, egli trova:

$$[ML^2T^{-2}] = [MLT^{-1}] + [ML^2T^{-2}]$$

Si accorge così che, mentre il primo e l'ultimo termine hanno le stesse dimensioni, non è così per il secondo termine.

E' chiaro allora che la formula trovata contiene un errore; è probabile inoltre che l'errore si trovi nel secondo termine, visto che gli altri due hanno le stesse dimensioni. Infine, lo studente nota che un fattore $[L T^{-1}]$ aggiunto al secondo termine renderebbe sue le dimensioni corrette. E' probabile allora che nella

formula egli abbia dimenticato un fattore v nel secondo termine. Un riesame del procedimento gli consente di individuare e correggere l'errore.

Si noti che, benché l'analisi dimensionale consenta di individuare alcuni errori, vi sono altri errori che non possono essere rivelati mediante questa tecnica: ad esempio, ciò accade quando in un'espressione manca o c'è in più un fattore adimensionale, o ancora quando è sbagliato il valore di un coefficiente numerico. In ogni caso, torna sempre utile controllare i propri risultati con l'analisi dimensionale.

2.

Un'altra applicazione dell'analisi dimensionale è quella di individuare le dimensioni, e quindi le unità di misura, corrette di alcuni termini che compaiono in una data formula.

Esempio

Supponiamo che si effettui una misura della velocità di un corpo in movimento a vari istanti di tempo. Supponiamo inoltre che i risultati di questa misura indichino che la velocità v può essere espressa in funzione del tempo t sotto forma di un polinomio di secondo grado:

$$v(t) = at^2 + bt + c$$

dove a , b , c sono tre coefficienti il cui valore numerico viene ottenuto dai dati misurati. Vogliamo conoscere quali sono le dimensioni di questi coefficienti.

Per rispondere a questa domanda basta applicare l'analisi dimensionale alla formula:

$$[LT^{-1}] = [a][T^2] + [b][T] + [c]$$

Si vede che ogni termine deve avere le dimensioni di una velocità $[LT^{-1}]$, da cui troviamo che :

$$[a] = [LT^{-3}] \quad [b] = [LT^{-2}] \quad [c] = [LT^{-1}]$$

Se usiamo come sistema di misura il SI, l'unità di misura di misura di a è $m s^{-3}$, l'unità di misura di misura di b è $m s^{-2}$, l'unità di misura di misura di a è $m s^{-1}$.

Esempio

Un circuito elettrico è formato da un condensatore e da una resistenza. Nel circuito è inserito anche un interruttore e un amperometro che fornisce il valore dell'intensità di corrente i . Inizialmente il condensatore è carico e, all'istante iniziale $t = 0$ s l'interruttore viene chiuso permettendo il passaggio della corrente. Misurando l'intensità di corrente i a vari istanti di tempo, si trova che essa segue la legge:

$$i(t) = ae^{-bt}$$

dove a e b sono due costanti positive. Vogliamo trovare le dimensioni delle costanti a e b . Procediamo nel modo seguente:

- l'argomento (-bt) della funzione esponenziale deve essere una quantità adimensionale, allora

$$[b][T] = [1]$$

per cui b ha le dimensioni $[T^{-1}]$.

- Il risultato della funzione esponenziale è anch'esso adimensionale, per cui

$$[I] = [a] [1]$$

quindi la costante a ha le dimensioni [I] di un'intensità di corrente.

In conclusione, utilizzando il SI, misureremo a in ampere e b in s^{-1} .

3.

Un'ulteriore applicazione dell'analisi dimensionale è quella di cercare di dedurre la forma analitica di certe quantità, in funzione delle quantità rilevanti (dati) del problema, basandosi solo sulla loro dimensione fisica. Come si vedrà dagli esempi seguenti, tale metodo fornisce il risultato voluto a meno di un fattore numerico che rimane indeterminato. Pertanto, ciò che otteniamo è solo una stima dell'ordine di grandezza del risultato cercato.

Esempio

Un corpo puntiforme di massa m è posto inizialmente ad un'altezza h rispetto al suolo. Viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla. Come sappiamo, il moto del corpo soggetto alla sola forza peso, quindi in condizioni di attrito trascurabile, si svolge con un'accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità g. Dedurre una stima della velocità v_1 con cui il corpo tocca il suolo, in funzione dei dati citati, ossia, in funzione delle quantità m, h e g.

Soluzione:

Facciamo l'ipotesi che il valore cercato v_1 dipenda dai dati secondo un'espressione matematica nella quale i dati stessi compaiano elevati ad una qualche potenza da determinare. Consideriamo perciò un'espressione del tipo:

$$v_1 = km^\alpha h^\beta g^\gamma$$

dove k è una costante numerica adimensionale, mentre gli esponenti α , β e γ sono incogniti. Si noti che questi esponenti potranno anche essere frazionari o, eventualmente, negativi.

Per determinare α , β e γ facciamo l'analisi dimensionale della formula scritta sopra:

$$[LT^{-1}] = [1] [M^\alpha] [L^\beta] [(LT^{-2})^\gamma]$$

ossia

$$[LT^{-1}] = [M^\alpha] [L^{\beta+\gamma}] [T^{-2\gamma}]$$

Poiché i due membri dell'equazione devono avere le stesse dimensioni, ne deduciamo le seguenti relazioni:

$$\alpha = 0$$

$$\begin{aligned}\beta + \gamma &= 1 \\ -2\gamma &= -1\end{aligned}$$

il sistema formato da queste tre equazioni ha come unica soluzione i valori:

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 1/2 \quad ; \quad \gamma = 1/2$$

Il valore nullo di α indica che l'espressione della velocità v_1 non può dipendere dalla massa del corpo. Sostituendo i valori degli altri due esponenti nella formula troviamo infine

$$v_1 = k\sqrt{gh}$$

Quindi, l'ordine di grandezza della velocità v_1 è dato da

$$v_1 \approx \sqrt{gh}$$

che è il risultato richiesto.

Si noti che il valore di k è rimasto indeterminato in quanto, essendo una quantità adimensionale, essa non può essere determinata usando solamente l'analisi dimensionale. L'unico modo di determinare k è invece quello di studiare lo stesso problema per mezzo delle equazioni della dinamica. In tal caso, si ottiene la seguente espressione

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Confrontando con quanto ottenuto sopra si vede che la costante k ha il valore $k = 2^{1/2} \approx 1.41$. Quindi, in questo problema la costante k ha un valore abbastanza vicino all'unità. Perciò, il risultato ottenuto per mezzo della sola analisi dimensionale

$$v_1 \approx \sqrt{gh}$$

(che equivale a porre $k = 1$) fornisce comunque una buona stima dell'ordine di grandezza di v_1 .

Esempio

Un pendolo semplice è costituito da un corpo di massa m , appeso ad un punto fisso per mezzo di un filo di lunghezza fissata d . Esso è soggetto alla forza-peso e si muove oscillando intorno alla posizione più bassa.

Dedurre una stima del periodo di oscillazione τ (ossia del tempo che il pendolo impiega per compiere un'oscillazione completa) in funzione dei dati del problema, usando la sola analisi dimensionale.

Soluzione:

I dati del problema sono: la massa m del corpo, la lunghezza l del filo e la forza-peso $F_p = mg$, cioè la massa m e l'accelerazione di gravità g . Come nell'esempio precedente, procediamo esprimendo il periodo τ in funzione di queste quantità, mediante l'espressione generica:

$$\tau = km^\alpha l^\beta g^\gamma$$

dove k è una costante adimensionale, mentre α, β e γ sono i tre esponenti (eventualmente frazionari e/o negativi) da determinare. Facendo l'analisi dimensionale della formula otteniamo:

$$[T] = [1] [M^\alpha] [L^\beta] [(LT^{-2})^\gamma]$$

ossia:

$$[T] = [M^\alpha] [L^{\beta+\gamma}] [T^{-2\gamma}]$$

Poiché i due membri dell'equazione devono avere le stesse dimensioni, ne deduciamo le seguenti relazioni:

$$\alpha = 0$$

$$\beta + \gamma = 0$$

$$-2\gamma = 1$$

il sistema formato da queste tre equazioni ha come unica soluzione i valori:

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 1/2 \quad ; \quad \gamma = -1/2$$

Il valore nullo di α indica che l'espressione del periodo τ del pendolo non può dipendere dalla massa del corpo. Sostituendo i valori degli altri due esponenti nella formula troviamo infine

$$\tau = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pertanto, una stima dell'ordine di grandezza del periodo è data da

$$\tau \approx \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nota: l'espressione esatta del periodo τ si ricava applicando le leggi della Meccanica le quali forniscono per la costante k il valore $k = 2\pi \approx 6.28$. A differenza dell'esempio precedente, stavolta il valore di k è abbastanza diverso dall'unità. Comunque, tale valore non modifica sostanzialmente l'ordine di grandezza della stima ottenuta mediante l'analisi dimensionale.

LA MISURAZIONE DELLE GRANDEZZE FISICHE

1. Che cosa significa misurare una grandezza fisica

L'operazione di misura consiste nel confrontare la grandezza fisica da misurare con un'unità di misura della stessa grandezza. Tale operazione viene effettuata tramite uno strumento di misura.

Esempio:

La lunghezza di una fune (*grandezza fisica*) si può misurare in metri (*unità di misura*) utilizzando un nastro graduato (*strumento di misura*).

La misura di una grandezza fisica può essere diretta o indiretta:

- a) misura diretta: il valore numerico della grandezza si ottiene tramite il confronto della quantità da misurare con l'unità di misura, mediante uno strumento di misura;
- b) misura indiretta: il valore numerico della grandezza si ottiene utilizzando relazioni analitiche che legano la grandezza che si vuole determinare ad altre grandezze fisiche misurabili direttamente.

Il risultato di una singola misura deve fornire:

- 1) il valore numerico x della grandezza misurata;
- 2) l'errore Δx della misura;
- 3) l'unità di misura usata.

Esempio:

Una corda ha una lunghezza pari a

$$2.33 \pm 0.01 \text{ m}$$

- 1) $x = 2.33$ è il valore numerico della lunghezza;
- 2) $\Delta x = 0.01$ è l'errore della misura;
- 3) l'unità di misura utilizzata è il metro.

2. La natura e le proprietà degli errori di misura

L'**errore di misura** Δx è legato a varie cause e quindi può avere differenti caratteristiche.

Anzitutto, si deve tenere conto della sensibilità dello strumento di misura, che, a parità di grandezza fisica, varia da strumento a strumento.

Esempio:

Lo spessore di un banco potrebbe essere misurato utilizzando un righello graduato oppure un calibro a cursore. Nel primo caso, le tacche del righello sono poste a distanza di 1 mm, per cui tale strumento permette di apprezzare una lunghezza con un'approssimazione di 0.5 mm. Tale valore rappresenta la sensibilità dello strumento. Se invece viene utilizzato il calibro, esso permette di apprezzare fino a 1/20 di mm, per cui la sua sensibilità è di 0.05 mm.

Pertanto la precisione della misura effettuata con il calibro è 10 volte più precisa di quella effettuata con il righello.

Gli **errori di misura** sono classificabili secondo il seguente schema:

- A) Errori grossolani
- B) Errori sistematici
- C) Errori casuali

Gli **errori grossolani** possono essere causati, ad esempio, da errate letture degli strumenti, o da un uso improprio degli stessi, o da errori di trascrizione delle misure, ecc. Essi sono di solito dovuti a distrazioni o all'inesperienza di chi effettua la misura. Gli errori grossolani possono (e devono) essere evitati effettuando le misure con cura ed attenzione.

Gli **errori sistematici** sono caratterizzati dal fatto che, in misure ripetute della stessa grandezza fisica, essi hanno sempre la stessa ampiezza. Tali errori sono dovuti in genere ad una cattiva taratura dello strumento di misura.

Esempio:

un nastro graduato in materiale plastico si è deformato a causa di una trazione eccessiva, per cui la sua lunghezza è aumentata in maniera permanente del 5% rispetto alla sua lunghezza originale. Perciò, se questo strumento viene utilizzato per misurare la lunghezza di vari oggetti, la misura così ottenuta risulterà sistematicamente minore della lunghezza reale.

Per questa loro caratteristica, gli errori sistematici sono difficili da individuare e sono particolarmente insidiosi in quanto possono seriamente compromettere la validità di una misura. Per evitare gli errori sistematici si può:

- a) controllare periodicamente la taratura dello strumento di misura;
- b) effettuare più misure con due strumenti simili, confrontando i risultati per evidenziare eventuali deviazioni sistematiche tra uno strumento e l'altro;
- c) se si ha una stima attendibile della grandezza misurata, questa può essere confrontata con la misura ottenuta.

Nel caso in cui si fanno misure ripetute della stessa grandezza con lo stesso strumento, è probabile ottenere numeri che differiscono l'uno dall'altro per meno

dell'errore di sensibilità dello strumento. Questa variabilità della misura costituisce **l'errore casuale**. Gli errori casuali sono dovuti a variazioni casuali, ossia imprevedibili, delle condizioni in cui si effettua una singola misura.

Esempio

Si vuole misurare il periodo di oscillazione di un pendolo utilizzando un cronometro. Lo strumento viene fatto partire all'inizio di un'oscillazione e viene fermato alla fine della decima oscillazione; il valore del periodo si ottiene dividendo per 10 il tempo così misurato. Se si effettua la misura più volte si noterà che il valore del periodo così ottenuto è sempre differente. Ciò è dovuto al fatto che l'atto di far partire e bloccare il cronometro è influenzato dal tempo di reazione di chi effettua la misura. Poiché il tempo di reazione varia di volta in volta in maniera casuale, si otterranno risultati differenti in ogni misura.

A differenza degli errori grossolani e sistematici, gli errori casuali non possono mai essere completamente eliminati, in quanto ogni misura è sempre influenzata da fattori esterni imprevedibili. Ciò nonostante, in virtù del loro carattere casuale, l'effetto di tali errori può essere ridotto e controllato utilizzando delle **tecniche di tipo statistico**. In particolare, si ripete molte volte la stessa misura e si effettua la media aritmetica dei risultati ottenuti. Infatti, si dimostra che se l'errore in ogni singola misura è casuale, allora la media aritmetica è il valore più rappresentativo della misura stessa.

Il **valore medio** di un campione di N misure $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ è definito dall'espressione:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

Per ogni data misura x_i del campione, si può definire il corrispondente scarto r_i come la differenza tra la misura stessa e il valore medio

$$r_i = x_i - \langle x \rangle$$

E' chiaro che tanto più grandi sono mediamente gli scarti, tanto maggiore sarà l'incertezza della misura e, viceversa, tanto più piccoli sono gli scarti, tanto più precisa sarà la misura. Perciò, si potrebbe pensare che una quantità che possa rappresentare la precisione della misura sia data dalla media degli scarti. In realtà, non è difficile dimostrare che la media degli scarti in ogni campione di misure è esattamente pari a zero; ciò è legato al fatto che ogni singolo scarto r_i può essere sia positivo che negativo. Per ovviare a questo inconveniente, si considera la media degli scarti elevati a quadrato, i quali sono quantità tutte positive. Questa nuova quantità è detta **scarto quadratico medio**, ed è definita dall'espressione:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2$$

La sua radice quadrata σ è detta **deviazione standard**; essa rappresenta una misura di quanto il campione $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ è disperso intorno al proprio valore medio. In

particolare, si può dimostrare che, se gli errori sono casuali, c'è una probabilità del 99,7% che ogni possibile misura x_i cada nell'intervallo compreso tra $\langle x \rangle - 3\sigma$ e $\langle x \rangle + 3\sigma$. Perciò, la quantità 3σ rappresenta l'errore statistico sul valore misurato, quando questo viene rappresentato dal valore medio.

3. La propagazione degli errori

Come si è detto, una grandezza fisica può essere misurata in **modo indiretto**, ossia il suo valore viene espresso in funzione del valore di altre grandezze fisiche che vengono direttamente misurate.

Esempio

Si vuole conoscere il valore di una resistenza R inserita in un circuito elettrico e si dispone di un voltmetro, che misura la differenza di potenziale, e di un amperometro, che misura l'intensità di corrente. Mediante questi strumenti misuriamo la differenza di potenziale V ai capi della resistenza e l'intensità di corrente i che circola nella resistenza. Quindi, il valore cercato della resistenza è fornito dalla prima legge di Ohm, in funzione di V e di i :

$$R = \frac{V}{i}$$

In questo caso, le misure di V ed i sono dirette, mentre il valore di R così ottenuto è il risultato di una misura indiretta.

Nel caso in cui il valore x di una data grandezza è frutto di una misura indiretta, dobbiamo tenere conto che ognuna delle quantità misurate direttamente è affetta da errore; questi errori di misura, a loro volta, produrranno un'incertezza sul valore x della grandezza misurata indirettamente. Questo fenomeno è detto **propagazione degli errori**.

Diamo ora un'indicazione di come si possa calcolare l'errore di una grandezza misurata indirettamente conoscendo gli errori delle grandezze misurate in modo diretto.

Indichiamo con u_1, u_2, \dots, u_n alcune grandezze misurate in modo diretto, e con x una grandezza che dipende da u_1, u_2, \dots, u_n e che quindi è misurata indirettamente. Per ognuna di queste grandezze si definisce **l'errore relativo**, come il rapporto tra l'errore e il valore della corrispondente grandezza, preso in valore assoluto. Ad esempio, l'errore relativo della grandezza u_1 è dato da

$$\left| \frac{\Delta u_1}{u_1} \right|$$

In molti casi concreti succede che la relazione che lega la grandezza x alle grandezze u_1, u_2, \dots, u_n scriva sotto forma di un prodotto di potenze:

$$x = k \cdot u_1^\alpha \cdot u_2^\beta \cdot \dots \cdot u_n^\gamma$$

dove k è una costante, mentre gli esponenti $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ possono anche essere negativi e/o frazionari. In questi casi si può dimostrare che esiste una semplice relazione che lega gli errori relativi delle varie grandezze, e che ha la forma seguente:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| = |\alpha| \left| \frac{\Delta u_1}{u_1} \right| + |\beta| \left| \frac{\Delta u_2}{u_2} \right| + \dots + |\gamma| \left| \frac{\Delta u_n}{u_n} \right|$$

Questa formula indica che l'errore relativo della grandezza x misurata indirettamente si ottiene sommando gli errori relativi delle varie grandezze misurate direttamente, ognuno moltiplicato per il corrispondente esponente (preso in valore assoluto). Da notare che la costante k non gioca nessun ruolo nel determinare l'errore relativo. Questa formula esprime la propagazione dell'errore, nel caso considerato

Esempio

L'area A di una figura triangolare si ottiene dal prodotto della base b per l'altezza h diviso per 2:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Se, nel misurare la base e l'altezza, si commettono gli errori Δb e Δh , rispettivamente, quale sarà l'errore relativo con cui conosceremo l'area A ? La risposta ci è data dalla formula precedente, dove gli esponenti di b ed h sono entrambi pari ad 1. Pertanto

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h}$$

Notiamo che il fattore $1/2$ non compare nel calcolo dell'errore relativo. Inoltre, non compaiono i valori assoluti in quanto A, b ed h sono grandezze positive, ed ognuno degli errori è positivo per definizione.

Esempio

Il periodo T di oscillazione di un pendolo semplice di lunghezza l , soggetto all'accelerazione di gravità g , è dato dall'espressione

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \cdot l^{1/2} \cdot g^{-1/2}$$

In questo caso, gli esponenti sono $1/2$ e $-1/2$, per cui la formula della propagazione dell'errore si scrive

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

dove Δl e Δg sono gli errori con cui sono state misurate la lunghezza l del pendolo e l'accelerazione di gravità g , rispettivamente. Notiamo che in questa

espressione non appare il fattore 2π , che era presente nella formula del periodo del pendolo. Inoltre, non compaiono i valori assoluti in quanto T , l e g sono grandezze positive, ed ognuno degli errori è positivo per definizione.