

1 Le equazioni con il valore assoluto

Si definisce valore assoluto di $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

In base a tale definizione è possibile risolvere equazioni e disequazioni in cui compaia il valore assoluto di espressioni contenenti l'incognita.

L'equazione

$$|f(x)| = k$$

- Se $k < 0$, non ha nessuna soluzione;
- Se $k = 0$, equivale a $f(x) = 0$;
- Se $k > 0$ equivale a

$$f(x) = -k \quad \vee \quad f(x) = k$$

cioè l'insieme delle soluzioni è l'unione degli insiemi delle soluzioni di queste due equazioni.

Esempio 1 $|x-3| = -2$ non ammette soluzioni perchè il valore assoluto di un numero reale non può essere negativo.

Esempio 2 $|x-3| = 0$ equivale a $x-3 = 0$, quindi l'unica soluzione è $x = 3$.

Esempio 3 $|x-3| = 5$ equivale a $x-3 = 5 \quad \vee \quad x-3 = -5$, quindi le soluzioni sono $x = 8 \quad \vee \quad x = -2$.

L'equazione

$$|f(x)| = g(x)$$

equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

L'insieme delle soluzioni è l'unione degli insiemi delle soluzioni di questi due sistemi.

Esempio 4 $|2x - 1| = 3x - 2$ equivale a risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = 3x - 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ -(2x - 1) = 3x - 2 \end{cases} \quad (2)$$

che si riducono a

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{5} = 0.6 \end{cases} \quad (3)$$

L'unica soluzione della disequazione è $x = 1$, fornita dal primo sistema. (Nel secondo sistema il valore $x = 0.6$ non soddisfa la condizione $x < \frac{1}{2}$)

L'equazione

$$|f(x)| = |g(x)|$$

equivale a

$$f(x) = g(x) \quad \vee \quad f(x) = -g(x)$$

L'insieme delle soluzioni è l'unione degli insiemi delle soluzioni di queste due equazioni.

Esempio 5 $|2x - 1| = |x - 4|$ equivale a

$$2x - 1 = x - 4 \quad \vee \quad 2x - 1 = -(x - 4)$$

quindi le soluzioni sono $x = -3 \quad \vee \quad x = \frac{5}{3}$.

2 Le disequazioni con il valore assoluto

Alcune disequazioni si risolvono senza fare calcoli, ricorrendo semplicemente alla definizione di valore assoluto.

Esempio 6 *La disequazione*

$$|x - 3| < 0$$

è impossibile perchè il valore assoluto di un numero reale non può essere negativo. La disequazione

$$|x - 3| \leq 0$$

è soddisfatta solo per $x=3$, valore per il quale il primo membro assume valore zero.

Esempio 7 *La disequazione*

$$|x - 3| \geq 0$$

è sempre verificata.

La disequazione

$$|x - 3| > 0$$

è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, valore per il quale il primo membro assume valore zero.

La disequazione

$$|x - 3| > -20$$

risulta sempre verificata.

Altre disequazioni richiedono maggiore attenzione.

La disequazione

$$|f(x)| \leq k \quad k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

è risolta dalla disequazione

$$-k \leq f(x) \leq k$$

le cui soluzioni si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(x) \leq k \\ f(x) \geq -k \end{cases} \quad (4)$$

La disequazione

$$|f(x)| \geq k \quad k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

è risolta dalla due disequazioni

$$f(x) \leq -k \quad \vee \quad f(x) \geq k.$$

Esempio 8 *La disequazione $|x^2 - 4| \leq 5$ equivale a*

$$-5 \leq x^2 - 4 \leq 5$$

le cui soluzioni sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq -5 \\ x^2 - 4 \leq 5 \end{cases} \quad (5)$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 \geq -1 \\ x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \quad (6)$$

Esempio 9 La disequazione $|\frac{1-x}{2+x}| < 1$ equivale a

$$-1 < \frac{1-x}{2+x} < 1$$

le cui soluzioni sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2+x} > -1 \\ \frac{1-x}{2+x} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2+x} > 0 \\ \frac{2x+1}{2+x} > 0 \end{cases} \cdots \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \quad (7)$$

Esempio 10 Risolvere la disequazione

$$\left| \frac{x-3}{x+5} \right| \geq 2$$

equivale a risolvere

$$\frac{x-3}{x+5} \leq -2 \quad \vee \quad \frac{x-3}{x+5} \geq 2 \quad (8)$$

da cui facilmente si trova che le soluzioni sono date da

$$-13 \leq x < -5 \quad \vee \quad -5 < x \leq -\frac{7}{3} \quad (9)$$

Esempio 11 Risolvere

$$(x+1)^2 < |x^2 - 1|$$

equivale a determinare le soluzioni di

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ (x+1)^2 < x^2 - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ (x+1)^2 < -(x^2 - 1) \end{cases} \quad (10)$$

da cui omettendo qualche passaggio

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x^2 + 2x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

La soluzione del primo sistema è

$$x < -1$$

La soluzione del secondo sistema è

$$-1 < x < 0$$

Unendo le soluzioni trovate si ottiene la soluzione della disequazione

$$\forall x : x < -1 \quad \vee \quad -1 < x < 0$$

che si può anche scrivere come

$$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

oppure

$$x \in (-\infty, 0) - \{-1\}$$

Esempio 12 Per risolvere la disequazione

$$|x^2 - 1| < 2 - |3 - 2x|$$

si studia per prima il segno di ciascun termine che compare in valore assoluto, ottenendo lo schema

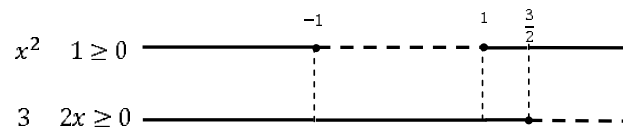


Figure 1: esempio 12

I quattro casi che si presentano portano alla risoluzione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x^2 - 1 < 2 - (3 - 2x) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -(x^2 - 1) < 2 - (3 - 2x) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x^2 - 1 < 2 - (-3 + 2x) \end{cases} \quad (14)$$

Dal primo sistema si ottiene

$$\begin{cases} x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 < x < 2 \end{cases} \quad (15)$$

cioè

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

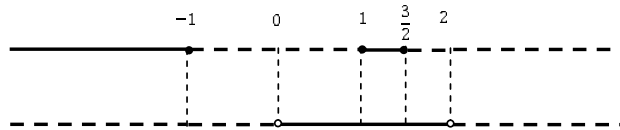


Figure 2: esempio 12

Dal secondo sistema si ottiene

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < -\sqrt{3} - 1 \quad \vee \quad x > \sqrt{3} - 1 \end{cases} \quad (16)$$

cioè

$$\sqrt{3} - 1 < x < 1$$

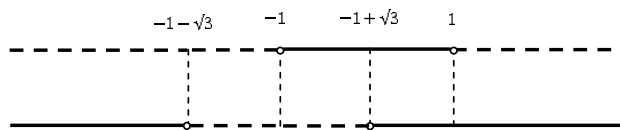


Figure 3: esempio 12

Ed infine dal terzo sistema si ha

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ -1 - \sqrt{7} < x < \sqrt{7} - 1 \end{cases} \quad (17)$$

cioè

$$\frac{3}{2} < x < \sqrt{7} - 1$$

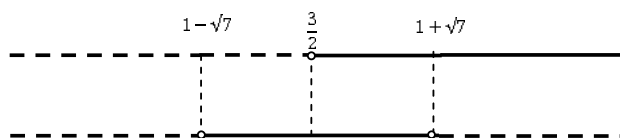


Figure 4: esempio 12

Mettendo insieme i risultati si conclude che la disequazione data è soddisfatta per

$$\sqrt{3} - 1 < x < 1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{2} < x < \sqrt{7} - 1$$

cioè per

$$\sqrt{3} - 1 < x < \sqrt{7} - 1$$

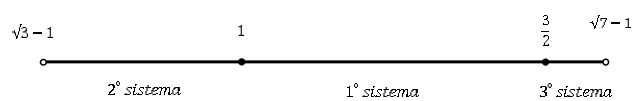


Figure 5: esempio 12